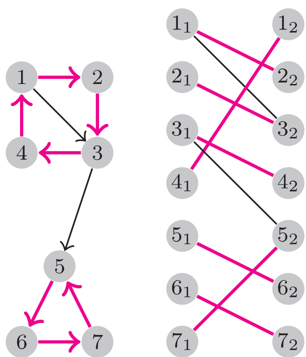
Ukryte skojarzenia

*Karol POKORSKI**

Przedstawimy tu dwa zagadnienia, w których pojawia się problem znajdowania najliczniejszego skojarzenia w grafie dwudzielnym, jednak trochę ukryty.

W pierwszym problemie mamy znaleźć tzw. *pokrycie cyklowe* grafu skierowanego. Pokrycie cyklowe grafu G jest to zbiór cykli skierowanych C, takich że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego cyklu z C. Chcielibyśmy szybko (tj. w czasie wielomianowym) odpowiadać na pytanie, czy dany graf ma pokrycie cyklowe, a jeśli tak, chcielibyśmy umieć wyznaczyć przykład takiego pokrycia.



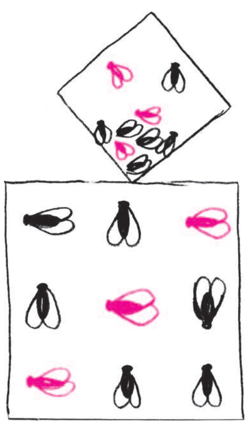
Rozwiązanie jest zaskakująco proste. Stwórzmy nowy graf G' w następujący sposób: każdy wierzchołek v oryginalnego grafu G rozbijamy w G' na dwa wierzchołki, v_1 i v_2, i jeśli w G istniała krawędź z a do b, to w G' tworzymy krawędź z a_1 do b_2.

Okazuje się teraz, że jeśli najliczniejsze skojarzenie w G' jest *doskonałe* (każdy wierzchołek jest skojarzony), to graf G ma pokrycie cyklowe. Formalne udowodnienie tego faktu jest dość proste: wystarczy pokazać bijekcję ze zbioru pokryć cyklowych w G w zbiór skojarzeń doskonałych w G. Szczegóły tego dowodu pozostawiam Czytelnikowi. Rysunek na marginesie podpowiada, jak tej bijekcji szukać.

Kolejnym przykładem zastosowania skojarzeń w rozwiązywaniu problemów jest wypełnianie *kwadratów łacińskich.* Kwadratem łacińskim nazywamy macierz (tabelkę) $n \times n$, w której każdy wiersz i każda kolumna jest permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n)$. Przykłady kwadratów łacińskich poniżej:

2	1	3
1	3	2
3	2	1

1	4	3	2
4	2	1	3
3	1	2	4
2	3	4	1

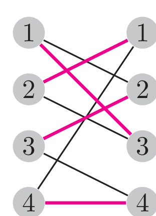


Rozważmy następujący problem: mamy kwadrat łaciński rozmiaru $n \times n$, w którym pokazano nam tylko k górnych wierszy (taki nie do końca wypełniony kwadrat nazywamy prostokątem łacińskim rozmiaru $k \times n$). Chcemy zrekonstruować cały kwadrat łaciński, oczywiście możliwie najszybciej.

Zamiast próbować rozwiązać ten problem w pełnej ogólności, spróbujmy najpierw rozwiązać jego mniejszą część (informatycy tak lubią!). Taką częścią problemu mogłoby być poprawne uzupełnienie wiersza $k + 1$. Jak to zrobić?

Konstruujemy graf dwudzielny G, w którym wierzchołki z jednej grupy będą reprezentować kolumny, natomiast wierzchołki z drugiej grupy reprezentować będą liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, które będziemy wpisywać do kolejnego wiersza. Jest już chyba jasne, że krawędź między i-tą kolumną a liczbą j należy stworzyć wtedy i tylko wtedy, gdy liczba j nie wystąpiła w i-tej kolumnie. W takim grafie szukamy najliczniejszego skojarzenia. Jeśli jest ono doskonałe, wyznacza ono pewien poprawny sposób wypełnienia wiersza $k + 1$:

1	4	3	2
4	2	1	3
?	?	?	?
?	?	?	?



1	4	3	2
4	2	1	3
3	**1**	**2**	**4**
?	?	?	?

A co, jeśli w G nie znajdziemy skojarzenia doskonałego? Okazuje się, że taka sytuacja nigdy nie wystąpi! Zanim jednak udowodnimy ten fakt, zauważmy, że właśnie uzyskaliśmy algorytm uzupełniający prostokąt do kwadratu łacińskiego: wystarczy wypełniać kolejne wiersze poprzez znajdowanie kolejnych skojarzeń doskonałych, a użyte krawędzie wyrzucać z grafu. Po wyrzuceniu z grafu wszystkich krawędzi kwadrat łaciński będzie uzupełniony.

*student, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Nadszedł czas na dowód faktu, że w skonstruowanym zgodnie z powyższą metodą grafie G zawsze istnieje skojarzenie doskonałe. Zauważmy, że graf G jest grafem *regularnym*, czyli stopnie wszystkich wierzchołków są w nim takie same (są one równe $d = n - k$). Okazuje się, że w dwudzielnym grafie regularnym zawsze istnieje skojarzenie doskonałe.

O twierdzeniu Halla pisaliśmy w *Delcie* 7/2013.

Aby to wykazać, skorzystamy z *twierdzenia Halla o małżeństwach*. Twierdzenie to głosi, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie doskonałego skojarzenia w grafie dwudzielnym jest, aby każdy podzbiór wierzchołków z jednej grupy (załóżmy, że jest on mocy p) miał połączenie łącznie z co najmniej p wierzchołkami z drugiej grupy (jest to tzw. warunek Halla). Dowód naszego faktu wykorzystujący twierdzenie Halla jest bardzo prosty: rozważmy dowolny podzbiór p kolumn. Z każdego wierzchołka odpowiadającego tym kolumnom wychodzi d krawędzi, a więc łącznie mamy $p \cdot d$ krawędzi. Gdyby warunek Halla dla rozważanego podzbioru nie był prawdziwy, tzn. gdyby rozważany podzbiór był połączony krawędziami z mniej niż p wierzchołkami z drugiej grupy, to na mocy zasady szufladkowej Dirichleta do pewnego z tych wierzchołków musiałoby prowadzić więcej niż d krawędzi. To jednak jest niemożliwe, gdyż graf jest regularny. Stąd dla grafu G warunek Halla jest rzeczywiście spełniony, więc G ma skojarzenie doskonałe.

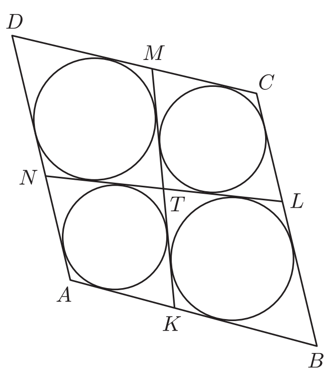
1	2	?
2	1	?
?	?	?

Warto jeszcze dodać, że gdybyśmy dostali do uzupełnienia prostokąt łaciński wymiaru nie $k \times n$, tylko $k \times l$ $(k, l < n)$, jego uzupełnienie do kwadratu $n \times n$ mogłoby okazać się niemożliwe. Obrazuje to podany obok przykład.

Zadania

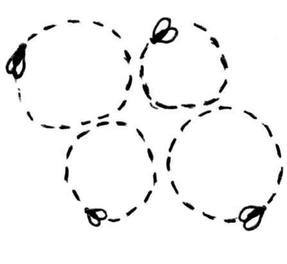
Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1402. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ dane są odpowiednio punkty K, L, M, N. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie T. Udowodnić, że jeśli w każdy z czworokątów $AKTN, KBLT, LCMT, MDNT$ można wpisać okrąg, to w czworokąt $ABCD$ także.
Rozwiązanie na str. 23



M 1403. Udowodnić, że dla malejącego ciągu $(x_i)_{i=1}^{n}$ liczb rzeczywistych dodatnich prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$
Rozwiązanie na str. 23

M 1404. Na lotnisku Jaś chce jak najszybciej przejść z punktu A do punktu B (w linii prostej). Idzie z prędkością v, a na swojej trasie ma odcinek, który pokonuje na ruchomej taśmie poruszającej się z prędkością u (czyli idąc po taśmie, Jaś porusza się z prędkością $v + u$ względem ziemi). Jaś musi po drodze zasznurować but, co powoduje, że stoi przez czas t. Czy powinien zasznurować but na ruchomej taśmie, czy poza nią? (Zakładamy dla uproszczenia, że taśma jest na tyle długa, że Jaś zdąży zasznurować na niej but, tzn. długość taśmy jest większa niż $u \cdot t$.)
Rozwiązanie na str. 5



Przygotował Michał NAWROCKI

F 843. Wykonana z przewodnika obręcz o promieniu r znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja magnetyczna jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej obręcz i zmienia się z czasem t zgodnie ze wzorem $B = kt$, gdzie k jest stałym współczynnikiem proporcjonalności. Na skutek zmian pola magnetycznego wytworzone zostaje pole elektryczne. Znaleźć natężenie pola elektrycznego E na obręczy.
Rozwiązanie na str. 19

F 844. Promień światła monochromatycznego wpada do wnętrza jednorodnej, przezroczystej kuli. Rozchodząc się wewnątrz kuli, promień dochodzi do jej granicy i tam częściowo odbija się, a częściowo, po załamaniu, wychodzi na zewnątrz. Jego odbita część biegnie wewnątrz kuli dalej i proces powtarza się wielokrotnie. Znaleźć kąt między kierunkiem promienia wpadającego do kuli i kierunkiem części promienia wychodzącej z kuli po k odbiciach.
Rozwiązanie na str. 9