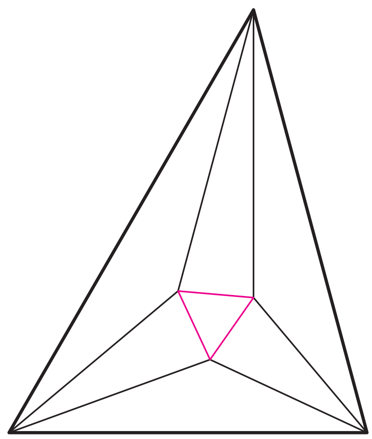
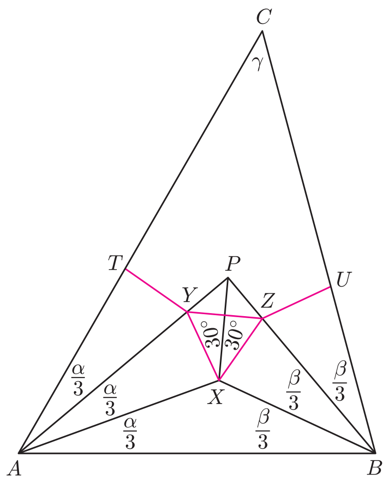
Twierdzenie Morleya


Rys. 1

Każdy wie, co to są dwusieczne kątów – tutaj będziemy mówili o *trójsiecznych*, czyli prostych dzielących kąt (i jego kąt wierzchołkowy) na trzy równe częsci. Zatem trójsieczne są dwie. Mają one dziwną własność zwaną twierdzeniem Morleya.

Punkty przeciecięcia tych trójsiecznych kątów trójkąta, które sąsiadują z którymś z boków trójkąta, są wierzchołkami trójkąta równobocznego (rys. 1).

Dowieść można go np. tak. Niech trójsieczne kątów przy wierzchołkach A i B, sąsiadujące z AB, przecinają się w punkcie X, a pozostałe trójsieczne tych kątów w punkcie P. Po obu stronach odcinka PX odłóżmy kąt $30°$ o wierzchołku X. Przecięcia ramion tego kąta z AP i BP oznaczmy, odpowiednio, przez Y i Z (rys. 2). Wykażemy, że trójkąt XYZ jest równoboczny i proste CY i CZ są trójsiecznymi kąta przy wierzchołku C, co zakończy dowód twierdzenia.



Rys. 2

W tym celu zauważmy najpierw, że PX jest dwusieczną kąta APB. Wynika to z faktu, że AX i BX są dwusiecznymi, odpowiednio, kątów PAB i PBA trójkąta ABP, a trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Okazało się więc, że czworokąt $XYPZ$ jest deltoidem, z czego wynika, że $XY = XZ$, co dowodzi, że trójkąt XYZ jest równoramienny.

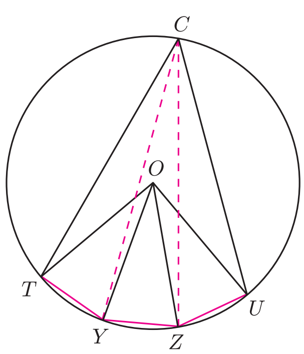
Ponadto mamy też $PY = PZ$, a skoro tak, to

$$\sphericalangle PYZ = \sphericalangle PZY = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle YPZ) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right) = \frac{1}{3}(\alpha+\beta).$$

Oznaczmy teraz obrazy symetryczne punktu X względem prostych AP i BP, odpowiednio, przez T i U (oczywiście, leżą one na AC i BC). Mamy więc $TY = YZ = ZU$.

Ponieważ $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, więc

$$\sphericalangle TYZ = \sphericalangle TYP + \sphericalangle PYZ = 60° + 2\sphericalangle PYZ =$$
$$= 60° + \frac{2}{3}(\alpha+\beta) = 60° + \frac{2}{3}(180° - \gamma) = 180° - \frac{2}{3}\gamma.$$

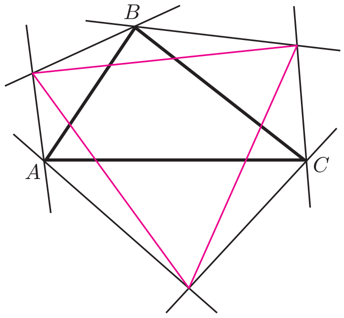


Rys. 3

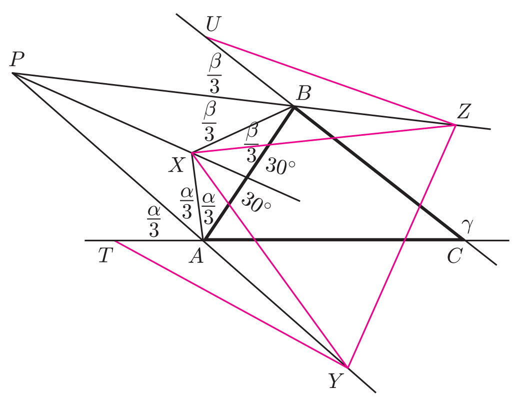
Podobnie $\sphericalangle UZY = 180° - \frac{2}{3}\gamma$. Na podstawie równości tych kątów i ich ramion można stwierdzić, że punkty T, Y, Z, U leżą na jednym okręgu (rys. 3). Jego środkiem jest mianowicie punkt O przecięcia dwusiecznych kątów TYZ i UZY. Każdy z odcinków TY, YZ i ZU jest cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu $\frac{2}{3}\gamma$. Ponieważ rozwartość kąta ACB (czyli TCU) jest równa γ, więc punkt C leży również na tym samym okręgu, a kąty TCY i UCZ, jako równe połowom kątów TOY i UOZ, mają rozwartość $\frac{1}{3}\gamma$, co kończy dowód.

W sformułowaniu twierdzenia nie było mowy o tym, że chodzi o kąty wewnętrzne, choć z tego korzystałem – rzecz w tym, że twierdzenie Morleya jest prawdziwe również dla kątów zewnętrznych i ma praktycznie taki sam dowód (trzeba tylko pamiętać, że suma kątów zewnętrznych jest równa 360°). Poniżej są rysunki do tego dowodu.

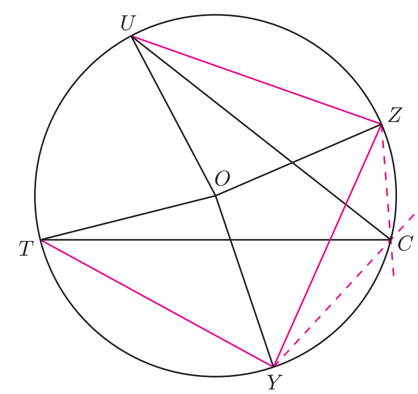
M. K.



Rys. 1′



Rys. 2′



Rys. 3′