Teoria czy praktyka?

Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach geometrycznych należy wykazać, że z pewnych trzech odcinków można zbudować trójkąt. Rozwiązania są zazwyczaj jednego z dwóch rodzajów. Pierwszy to rozumowania *teoretyczne* – dowody niekonstruktywne, na ogół polegające na sprawdzeniu, że dane odcinki spełniają nierówność trójkąta. Drugi typ to dowody *praktyczne*, w których buduje się trójkąt o żądanych długościach boków. Każde z poniższych zadań można rozwiązać każdą z tych dwóch metod.

1. Wysokości pewnego trójkąta mają długości odpowiednio h_a, h_b, h_c. Wykaż, że z odcinków o długościach $1/h_a, 1/h_b, 1/h_c$ można zbudować trójkąt.

2. Przeciwległe krawędzie czworościanu mają długości odpowiednio a i a', b i b' oraz c i c'. Wykaż, że z odcinków o długościach aa', bb', cc' można zbudować trójkąt.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Wykaż, że z odcinków o długościach PA, PB, PC można zbudować trójkąt.

Rozwiązania

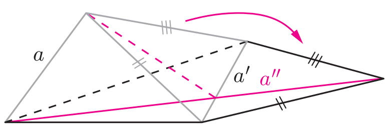
R1. *Teoria.* Oznaczmy boki danego trójkąta przez a, b, c tak, by pole było równe $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$. Korzystając z nierówności $a + b > c$, uzyskujemy wtedy

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} > \frac{c}{2P} = \frac{1}{h_c}.$$

Dowody pozostałych dwóch nierówności trójkąta są analogiczne. □

R1. *Praktyka.* Oznaczmy boki i pole danego trójkąta jak powyżej. Żądane warunki spełnia trójkąt podobny do niego w skali $1 : 2P$, ma bowiem boki długości

$$\frac{a}{2P} = \frac{1}{h_a}, \qquad \frac{b}{2P} = \frac{1}{h_b}, \qquad \frac{c}{2P} = \frac{1}{h_c}. \ \square$$



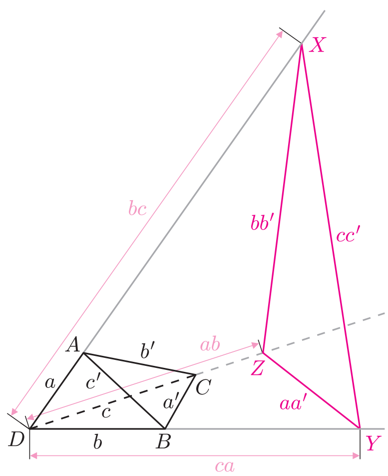
Rys. 1. Przeciwległe boki czarnego czworokąta mają długości b i b' oraz c i c'.

R2. *Teoria.* Rozważmy krawędź o długości a' danego czworościanu i zawierające ją ściany. Obróćmy wokół niej jedną z tych ścian tak, aby znalazła się w tej samej płaszczyźnie, co druga, ale po przeciwnej stronie tej krawędzi (rys. 1).

Otrzymujemy w ten sposób fragment siatki danego czworościanu – czworokąt, którego jedną przekątną jest a'; oznaczmy drugą przez a''. W wyjściowym czworościanie odcinek a'' odpowiada łamanej łączącej końce krawędzi a (rys. 1), więc z nierówności trójkąta $a < a''$.

Stąd i z nierówności Ptolemeusza, $aa' < a''a' \leqslant bb' + cc'$. Analogicznie dowodzimy pozostałych dwóch nierówności trójkąta dla odcinków o długościach aa', bb', cc'. □

Nierówność Ptolemeusza głosi, iż suma iloczynów długości przeciwległych boków czworokąta jest większa lub równa od iloczynu długości jego przekątnych. Przykłady jej zastosowań opisano w *deltoidzie* 6/2009.



Rys. 2

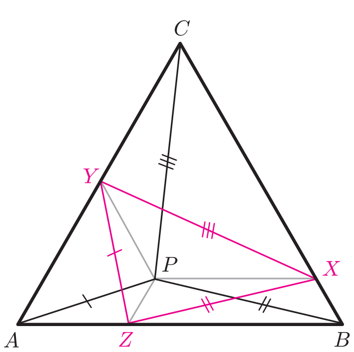
R2. *Praktyka.* Oznaczmy wierzchołki czworościanu przez A, B, C, D; z uwagi na przemienność iloczynów aa', bb', cc' możemy przyjąć, że $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$ (rys. 2). Na półprostych $DA^{\rightarrow}, DB^{\rightarrow}, DC^{\rightarrow}$ wybierzmy takie punkty odpowiednio X, Y, Z, aby $DX = bc$, $DY = ca$, $DZ = ab$. Punkty X, Y, Z nie są współliniowe, ponieważ rozważane półproste nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Trójkąty DAB i DYX są podobne, bo mają wspólny kąt przy wierzchołku D oraz

$$\frac{DA}{DB} = \frac{a}{b} = \frac{ca}{bc} = \frac{DY}{DX}.$$

Wobec tego $\dfrac{XY}{BA} = \dfrac{DY}{DA} = \dfrac{ca}{a} = c$, czyli $XY = c \cdot BA = cc'$.

Analogicznie wykazujemy, że $YZ = aa'$ oraz $ZX = bb'$, więc trójkąt XYZ ma boki o żądanych długościach. □



Rys. 3

R3. *Praktyka.* Niech X, Y, Z będą takimi punktami odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, że $PX \parallel AB$, $PY \parallel BC$, $PZ \parallel CA$ (rys. 3). Wówczas trapezy $XCYP$, $YAZP$, $ZBXP$ są równoramienne (bo ich kąty to $60°$ i $120°$). Wobec tego $YZ = PA$, $ZX = PB$, $XY = PC$, więc trójkąt XYZ jest zbudowany z odcinków o żądanych długościach. □

R3. *Teoria.* Dwa różne rozwiązania teoretyczne tego zadania opisano w *deltoidach* 6/2009 i 6/2012, przy drugim z nich przedstawiono także inne od powyższego rozwiązanie praktyczne.