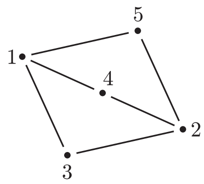
Informatyczny kącik olimpijski (66): Dwóch generałów

W tym kąciku zajmiemy się zadaniem *Dwóch generałów*, które pochodzi z Uniwersyteckich Zawodów Informatycznych organizowanych przez Uniwersytet Jagielloński, a konkretnie z konkursu z października 2009 roku.



Rys. 1. Dla powyższego planu Bitlandii, jeśli armia zaczyna w mieście 1, to generał A może przesunąć ją do miasta 3, 4 lub 5. Niezależnie od jego wyboru generałowi B pozostaje jedyny ruch do miasta 2. Generał A rusza wtedy do jeszcze nieodwiedzonego miasta ze zbioru $\{3,4,5\}$ i wygrywa. Jeśli armia zaczyna w mieście 3, to wygra generał B.

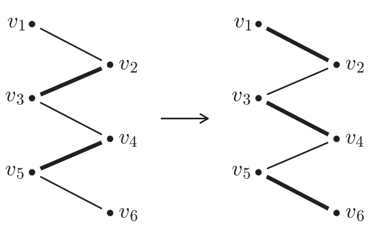
Generałowie A i B rywalizują ze sobą, na przemian dyktując ruchy bajtockiej armii, która prowadzi kampanię wojenną w Bitlandii. W kraju tym jest n miast połączonych między sobą dwukierunkowymi drogami. Ruch armii polega na przesunięciu jej z miasta, w którym stacjonuje, wzdłuż drogi, do jednego z miast sąsiednich. Każde miasto, w którym znajdzie się armia, zostaje złupione i spalone – nie można go więc odwiedzić ponownie. Jeśli generał nie będzie mógł wykonać ruchu, to ośmieszy się przed armią i przegra rywalizację. Dla każdej początkowej pozycji armii należy rozstrzygnąć, który z generałów wygra, zakładając, że generał A zaczyna i że obaj generałowie grają optymalnie (patrz rys. 1).

Plan Bitlandii możemy traktować jako graf nieskierowany G o n wierzchołkach i m krawędziach. Na początek spróbujmy rozwiązać prostszą wersję tego zadania, w której graf G jest dwudzielny (wierzchołki reprezentujące miasta możemy podzielić na dwa zbiory V_A, V_B tak, że każda krawędź-droga łączy wierzchołki znajdujące się w różnych zbiorach). Niech miasto początkowe będzie w V_A. W tej sytuacji ruch generała A zawsze prowadzi z V_A do V_B, zaś ruch generała B – przeciwnie. Rozważmy pewną rozgrywkę między generałami, w której zwycięża generał A oraz wszystkie miasta Bitlandii zostały odwiedzone. W rozgrywce tej dla każdego miasta $v \in V_A$ generał A wybrał pewne miasto $f(v) \in V_B$, do którego ruszył się z v. Z warunków zadania wynika, że funkcja f jest bijekcją. Ponadto, zbiór krawędzi, którymi poruszał się generał A, jest doskonałym skojarzeniem w grafie G.

Skojarzenie jest *doskonałe*, jeśli z każdego wierzchołka wychodzi krawędź z M (tzn. każdy wierzchołek jest skojarzony w M).

Zauważmy więc, że jeśli w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie M, to generał A wygrywa, startując z dowolnego miasta, a jego strategia polega na poruszaniu się po krawędziach ze skojarzenia M. Generał B nigdy nie będzie mógł zrobić ruchu krawędzią z M.

No dobrze, ale co w przypadku, gdy w G nie istnieje doskonałe skojarzenie? Niech M będzie pewnym najliczniejszym skojarzeniem w G, zaś $v_1 \in V_A$ będzie wierzchołkiem początkowym, który nie jest skojarzony w M. Zauważmy, że jakikolwiek ruch generała A musi prowadzić do wierzchołka $v_2 \in V_B$, który jest skojarzony w M, inaczej bowiem moglibyśmy powiększyć M, dokładając do niego krawędź v_1v_2. Generał B może wtedy odpowiedzieć ruchem wzdłuż krawędzi z M. Okazuje się, że będzie mógł tak zrobić zawsze. Załóżmy bowiem, że w k-tym ruchu generał B trafia na nieskojarzony wierzchołek, czyli $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ jest ciągiem odwiedzonych wierzchołków, $v_iv_{i+1} \in M$ wtedy gdy i jest parzyste, oraz v_1 i v_{2k} są nieskojarzone w M (rys. 2). Wówczas możemy usunąć ze skojarzenia $k-1$ krawędzi v_iv_{i+1} dla i parzystego, a zamiast tego dołożyć k krawędzi v_iv_{i+1} dla i nieparzystego, co daje skojarzenie liczniejsze niż M – sprzeczność. Wynika z tego, że jeśli w grafie G pewne najliczniejsze skojarzenie nie kojarzy wierzchołka początkowego, to skojarzenie to wyznacza strategię wygrywającą dla generała B.

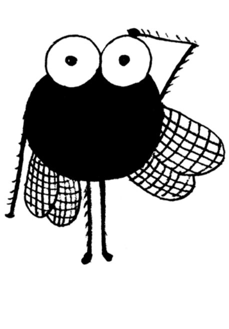


Rys. 2. Ilustracja przypadku dla $k = 3$. Krawędzie należące do M są pogrubione.

Pozostał do rozważenia przypadek, w którym wierzchołek początkowy v_1 jest skojarzony w każdym najliczniejszym skojarzeniu. Niech M będzie pewnym takim skojarzeniem. Pokażemy, że wygrywa generał A, a jego strategią jest poruszanie się wzdłuż krawędzi skojarzenia M. Argument jest podobny jak poprzednio: gdyby w pewnym momencie dla ciągu odwiedzonych wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$, wierzchołek v_{2k+1} był nieskojarzony w M, to wymieniając k krawędzi v_iv_{i+1} dla i nieparzystego na k krawędzi v_iv_{i+1} dla i parzystego, dostajemy nowe skojarzenie (równoliczne z M, a więc o największej liczności), które nie kojarzy wierzchołka v_1. Znów dochodzimy do sprzeczności.

Dla grafu z rysunku 1 mamy sześć najliczniejszych skojarzeń, z których każde kojarzy wierzchołek 1 oraz 2 i pozostawia jeden nieskojarzony wierzchołek ze zbioru $\{3,4,5\}$.

Wystarczy zatem dla każdego wierzchołka v sprawdzić, czy każde najliczniejsze skojarzenie kojarzy ten wierzchołek. Dowolne najliczniejsze skojarzenie M możemy wyznaczyć np. w czasie $O(nm)$, poprzez n-krotne wyszukanie ścieżki powiększającej. Wierzchołek v jest kojarzony w każdym najliczniejszym skojarzeniu, jeśli jest skojarzony w M oraz, po usunięciu v z grafu, liczność najliczniejszego skojarzenia się zmniejsza. Zauważmy, że szukając skojarzenia, nie musimy zaczynać zawsze od nowa, wystarczy w skojarzeniu M usunąć krawędź kojarzącą v oraz poszukać jednej ścieżki powiększającej. Zatem cały algorytm działa w czasie $O(nm)$.



W tym momencie Czytelnik może pokręcić z powątpiewaniem głową, że, owszem, zrobiliśmy rozgrzewkę i rozwiązaliśmy zadanie dla grafów dwudzielnych – ale jak nasze rozważania mają się do rozwiązania dla grafów dowolnych? I będzie miał słuszność, gdyż w istocie wiele problemów, które umiemy sprawnie rozwiązać dla grafów dwudzielnych, staje się trudne dla grafów niemających tej własności. Zachęcam jednak Czytelnika do przeczytania jeszcze raz powyższego rozwiązania i przekonania się, że tak naprawdę nigdzie nie korzystamy z założenia, że graf G jest dwudzielny. Zatem nasze rozwiązanie działa również w ogólnym przypadku, pod warunkiem że umiemy znajdować najliczniejsze skojarzenia w dowolnych grafach. Można to zrobić w czasie $O(n^3m)$ algorytmem Edmondsa i w takim też czasie działa całe rozwiązanie.

Tomasz IDZIASZEK