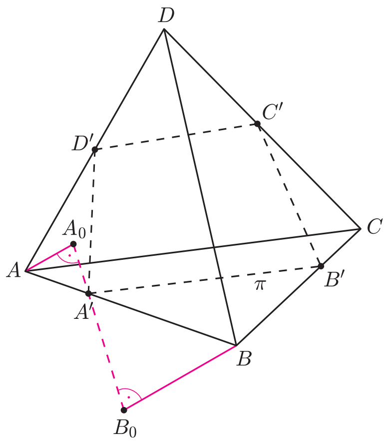
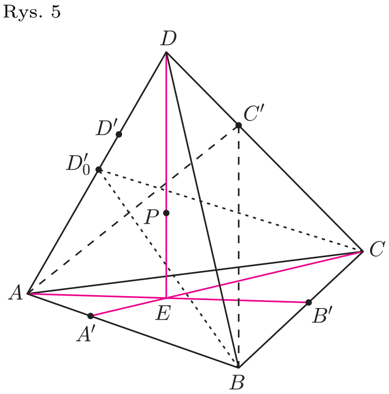


Rys. 5



Rys. 6

Na koniec podajemy kilka zadań dla Czytelników.

2. (Zwardoń 2002) *Przez środek każdej krawędzi czworościanu prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do przeciwległej krawędzi. Wykazać, że istnieje punkt wspólny otrzymanych sześciu płaszczyzn* (*punkt ten nazywa się* punktem Monge'a).

3. *Spodki wysokości pewnego czworościanu są różne od ortocentrów ścian, do których zostały poprowadzone. Wykazać, że płaszczyzny zawierające te wysokości i ortocentra ścian, do których zostały poprowadzone, przecinają się w jednym punkcie.*

4. *Dany jest czworościan $ABCD$. Odcinki AN i CM są dwusiecznymi w trójkącie ABC, odcinek BK jest dwusieczną w trójkącie BCD, zaś odcinek BL jest dwusieczną w trójkącie ABD. Wykazać, że istnieje punkt wspólny płaszczyzn ABK, BCL, ACM, ADN.*

5. Twierdzenie Cevy (wersja trygonometryczna). *Dany jest czworościan $A_1A_2A_3A_4$ i punkty $B_{i(i+1)}$ leżące na krawędziach $A_{i+2}A_{i+3}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ (przyjmujemy, że $A_{k+4} = A_k$). Każda z płaszczyzn $A_iA_{i+1}B_{i(i+1)}$ tworzy z płaszczyzną $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ kąt dwuścienny o mierze α_i, zaś z płaszczyzną $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ kąt dwuścienny o mierze β_i. Wykazać, że płaszczyzny $A_iA_{i+1}B_{i(i+1)}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ mają wspólny punkt wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\beta_4} = 1.$$

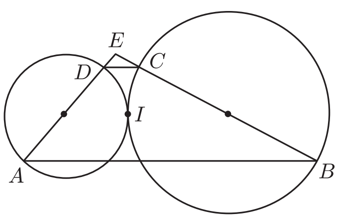
6. *Punkt P leży wewnątrz czworościanu $A_1A_2A_3A_4$. Wykazać, że płaszczyzny symetryczne do płaszczyzn $A_iA_{i+1}P$ względem płaszczyzn dwusiecznych kątów dwuściennych przy krawędziach A_iA_{i+1} dla $i = 1, 2, 3, 4$ przecinają się w jednym punkcie.*

Michał KIEZA

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1399. Dany jest trapez $ABCD$. Ramiona AD i BC przecinają się w punkcie E i są średnicami okręgów stycznych zewnętrznie w punkcie I (rys. 1). Udowodnić, że I leży na dwusiecznej kąta AEB.
Rozwiązanie na str. 6



Rys. 1

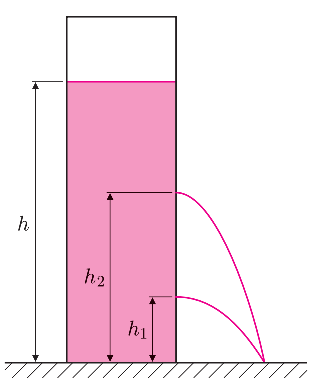
M 1400. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$, taka, że $p + 2$ też jest pierwsza. Na tablicy napisano liczby $1, 2, \ldots, p$. W każdym kroku wybieramy jedną z nich, powiedzmy k, po czym zmazujemy wszystkie dzielniki liczby $k + p$. Udowodnić, że w ten sposób nigdy nie zmażemy wszystkich liczb napisanych na tablicy.
Rozwiązanie na str. 2

M 1401. Udowodnić, że dla $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ prawdziwa jest nierówność

$$1/\cos\alpha + 1/\cos\beta \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Kiedy zachodzi równość?
Rozwiązanie na str. 22

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI



Rys. 2

F 841. Woda wypływa ze zbiornika przez dwa leżące jeden nad drugim otwory, jak to przedstawiono na rysunku 2. Jeden otwór znajduje się na wysokości $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$, a drugi na wysokości $h_2 = 50\,\mathrm{cm}$ powyżej podstawy zbiornika. Strugi wody wypływającej ze zbiornika przez te otwory trafiają w to samo miejsce na wysokości podstawy. Ile wynosi poziom wody w zbiorniku?
Rozwiązanie na str. 10

F 842. Im większa jest energia kinetyczna pocisku w chwili uderzenia w cel, tym większa jest „skuteczność strzału". Czy przy tym samym ładunku materiału wybuchowego naboju (tej samej energii początkowej pocisku) „skuteczność strzału" rośnie z masą pocisku, czy maleje? Przyjmujemy, że prędkość pocisku jest podczas całego lotu mniejsza od prędkości dźwięku.
Rozwiązanie na str. 17