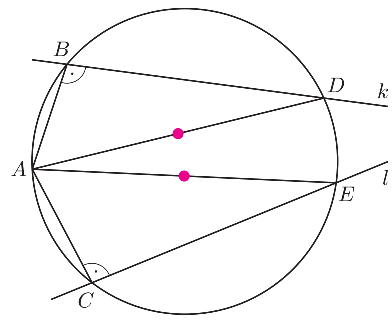
Oszustwa

Joanna JASZUŃSKA

Udowodnimy kilka ewidentnych bzdur, na przykład istnienie okręgu o dwóch środkach czy równość $90^\circ = 110^\circ$. Zachęcam Czytelników do samodzielnego odszukania błędów w tych dowodach przed lekturą zamieszczonych na końcu wyjaśnień.

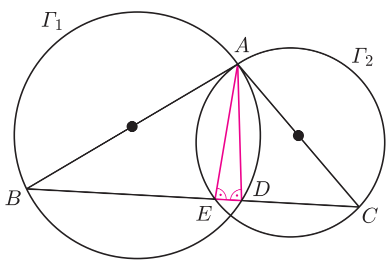


Rys. 1

1. Istnieje okrąg o dwóch środkach.

D. Rozważmy dwie nierównoległe proste k i l oraz punkt A poza nimi (rys. 1). Punkty B i C to rzuty punktu A odpowiednio na proste k i l. Proste te nie są równoległe, stąd odcinki AB i AC też nie są, więc powstaje trójkąt ABC.

Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina proste k i l odpowiednio w punktach D i E. Wtedy $\sphericalangle ABD = 90^\circ$, więc odcinek AD jest średnicą tego okręgu, a środek AD – środkiem okręgu. Analogicznie $\sphericalangle ACE = 90^\circ$, więc odcinek AE też jest średnicą okręgu, a środek AE – drugim środkiem okręgu. □

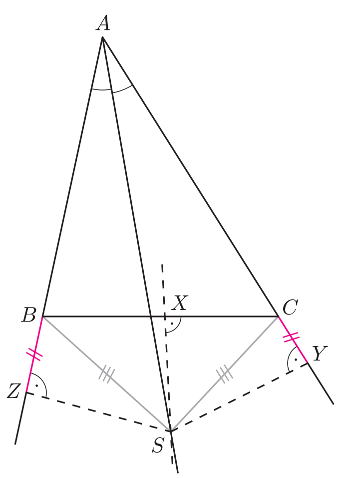


Rys. 2

2. Istnieje trójkąt o dwóch kątach prostych.

D. Rozważmy przecinające się okręgi Γ_1 i Γ_2 (rys. 2). Niech A będzie jednym z ich wspólnych punktów oraz niech AB i AC będą średnicami odpowiednio Γ_1 i Γ_2. Prosta BC przecina okręgi Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w punktach D i E.

W trójkącie ADE kąt ADE jest prosty jako wpisany w okrąg Γ_1, oparty na średnicy AB. Analogicznie kąt AED jest drugim kątem prostym w tym trójkącie. □



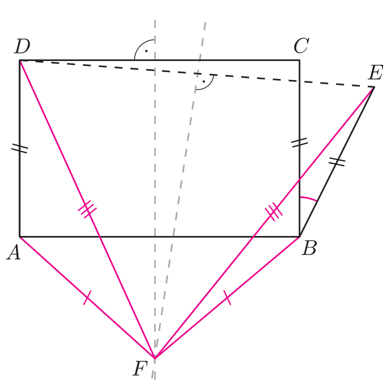
Rys. 3

3. Każdy trójkąt jest równoboczny.

D. Przypuśćmy, że $AB \neq AC$ w pewnym trójkącie ABC (rys. 3). Dwusieczna kąta BAC nie jest wtedy wysokością tego trójkąta, więc przecina symetralną boku BC w pewnym punkcie S. Punkty X, Y, Z to rzuty punktu S odpowiednio na proste BC, AC, AB.

Wówczas $\triangle ASZ \equiv \triangle ASY$ (bo mają równe kąty i wspólny bok AS), stąd $AZ = AY$ oraz $SZ = SY$. Ponadto S leży na symetralnej odcinka BC, więc $SB = SC$.

Z ostatnich dwóch równości wynika, że trójkąty prostokątne SBZ i SCY też są przystające, więc $BZ = CY$. Zatem $AB = AZ - BZ = AY - CY = AC$, sprzecznie z założeniem. □



Rys. 4

4. $90^\circ = 110^\circ$.

D. Rozważmy prostokąt $ABCD$ (rys. 4). Punkt E, na zewnątrz tego prostokąta, spełnia warunki $BE = BC$ oraz $\sphericalangle CBE = 20^\circ$. Symetralne odcinków AB i DE przecinają się w punkcie F. Wówczas $FA = FB$ oraz $FD = FE$. Ponadto z założenia $AD = BC = BE$. Wobec powyższego trójkąty FAD i FBE są przystające, a stąd $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FBE$.

Trójkąt FAB jest równoramienny ($FA = FB$), zatem $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA$.

Podsumowując, mamy $90^\circ = \sphericalangle BAD = \sphericalangle FAD - \sphericalangle FAB = \sphericalangle FBE - \sphericalangle FBA =$
$= \sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBE = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$. □

Rozwiązania

R1. Rozważany okrąg przechodzi przez punkt przecięcia prostych k i l. Pokrywają się punkty D i E, więc również średnice AD i AE, a także ich środki. □

R2. Punkty D i E pokrywają się (i znajdują się w punkcie przecięcia okręgów Γ_1 i Γ_2, różnym od A). Trójkąt ADE jest więc zdegenerowany do odcinka. □

R3. Punkt S jest środkiem tego łuku $\overset{\smile}{BC}$ okręgu opisanego na trójkącie ABC, do którego nie należy punkt A, bo środek ten leży i na dwusiecznej kąta BAC, i na symetralnej boku BC. Czworokąt $ABSC$ jest więc wpisany w okrąg, stąd $\sphericalangle ABS + \sphericalangle ACS = 180^\circ$. Jeśli oba te kąty są proste, to $\triangle ABS \equiv \triangle ACS$, czyli $AB = AC$. Zatem jeden z kątów ABS, ACS jest ostry, a drugi rozwarty. Przyjmijmy, że kąt ACS jest ostry. Wówczas punkt Y należy do boku AC, a punkt Z leży poza odcinkiem AB. Stąd $AB = AZ - BZ$, ale $AC = AY + CY$. □

R4. Symetralna boku AB jest jednocześnie symetralną boku CD. Punkt F, jako punkt przecięcia symetralnych odcinków CD i DE, jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDE, więc leży także na symetralnej odcinka CE. Leży na niej również punkt B. Oznacza to, że trójkąt FBE nie wygląda tak, jak na rysunku 4 – punkt E leży po przeciwnej stronie prostej FB. Wobec tego kąt FBE w tym trójkącie nie jest sumą kątów FBA i ABE, tylko jej dopełnieniem do 360°. □