Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 657 ($WT = 1{,}71$) i 658 ($WT = 1{,}81$) z numeru 3/2013

Jerzy Cisło	Wrocław	44,58
Paweł Łabędzki	Kielce	43,50
Krzysztof Kamiński	Pabianice	41,63
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Paweł Najman	Kraków	39,71
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Marek Spychała	Warszawa	36,50

Znakomity uczestnik Ligi, Jerzy Cisło – już trzykrotnie Weteran – a teraz dziesiąty raz!

Zadania z matematyki nr 667, 668

Redaguje Marcin E. KUCZMA

667. Kwadratowa plansza o rozmiarach $n \times n$ ma pola pokolorowane jak szachownica; n jest ustaloną liczbą parzystą. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy dowolny prostokąt, złożony z pól planszy, i zmieniamy kolory wszystkich pól w obrębie tego prostokąta (białe na czarne, czarne na białe). Wyznaczyć najmniejszą liczbę ruchów wystarczającą, by wszystkie pola planszy uzyskały jednakowy kolor.

668. Czy istnieje podzbiór właściwy zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są działania mnożenia i dzielenia, nie zawierający się w żadnym innym podzbiorze właściwym zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są powyższe działania?

Zadanie 668 zaproponował pan Michał Kremzer.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2013

Przypominamy treść zadań:

663. Czy istnieje nieskończony, ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $k_0, k_1, k_2, \ldots$ taki, że dla każdego $i \geqslant 0$ iloczyn $k_{3i}k_{3i+1}k_{3i+2}$ jest podzielny przez każdą z liczb $k_{3i}+1$, $k_{3i+1}+1$, $k_{3i+2}+1$?

664. Dowieść, że jeśli liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^2 - x\lfloor x\rfloor - 1 = 0$, to każda potęga liczby x o wykładniku dodatnim nieparzystym także spełnia to równanie.

663. Takie ciągi istnieją. Oto jedna z możliwych konstrukcji. Zaczynamy od liczb $k_0 = 2$, $k_1 = 5$, $k_2 = 9$. Przyjmijmy, że wyrazy $k_0, k_1, \ldots, k_{3n-1}$ są już określone i tworzą ciąg rosnący długości $3n$, spełniający wymagany warunek. Oznaczmy dla wygody: $k_{3n-1} = m$. Określamy kolejne trzy wyrazy:

$$k_{3n} = 2m, \qquad k_{3n+1} = 4m+1, \qquad k_{3n+2} = (4m-1)(2m+1).$$

Jasne, że $k_{3n-1} < k_{3n} < k_{3n+1} < k_{3n+2}$. Pozostaje sprawdzić, że iloczyn trzech wypisanych liczb, równy $2m(2m+1)(4m-1)(4m+1)$, dzieli się przez każdą z tych liczb, powiększoną o 1, czyli przez liczby $2m+1$, $4m+2$, $8m^2+2m$; a to jest oczywiste. Kontynuując, otrzymujemy nieskończony ciąg (k_i) o żądanych własnościach.

664. Skoro $x(x - \lfloor x\rfloor) = 1$, to $x > 1$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej liczby nieparzystej $n \geqslant 1$ różnica $y_n = x^n - x^{-n}$ jest liczbą całkowitą.

Dzieląc wyjściowe równanie przez x, widzimy, że $y_1 = \lfloor x\rfloor$ (liczba całkowita). Zatem także liczba $y_3 = y_1^3 + 3y_1$ jest całkowita.

Ustalmy wykładnik nieparzysty $n \geqslant 3$ i załóżmy, że liczby y_{n-2} oraz y_n są całkowite. Przekształcenie

$$y_{n+2} + y_{n-2} = x^{n+2} + x^{n-2} - x^{2-n} - x^{-2-n} = (x^n - x^{-n})(x^2 + x^{-2}) = y_n(y_1^2 + 2)$$

pokazuje, że wówczas liczba y_{n+2} też jest całkowita. Przez indukcję wnosimy, że liczby $y_1, y_3, y_5, y_7, \ldots$ wszystkie są całkowite.

Ponownie ustalmy wykładnik nieparzysty n. Ze związków $x > 1$, $x^n = y_n + x^{-n}$ (y_n całkowite) wynika, że $y_n = \lfloor x^n\rfloor$. Zachodzi więc równość $x^n - \lfloor x^n\rfloor - x^{-n} = 0$. Wystarczy ją pomnożyć przez x^n, by uzyskać tezę zadania.

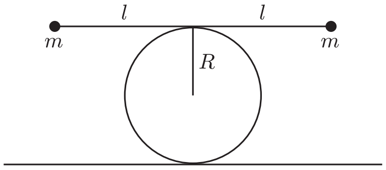
Rozwiązanie zadania M 1401.
Z nierówności między średnimi i oszacowania $\sin x \leqslant x$ mamy

$$1/\cos\alpha + 1/\cos\beta \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{1/(\cos\alpha\cos\beta)} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{\sin(\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)} =$$
$$= 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

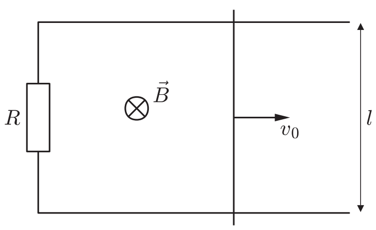
Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\alpha = \cos\beta$ i $\sin(\alpha+\beta) = 1$, co jest równoważne temu, że $\alpha = \beta = \pi/4$.

Klub 44

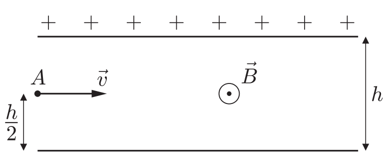
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2013



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 552 ($WT = 1{,}95$) i 553 ($WT = 2{,}7$) z numeru 2/2013

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	43,72
Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,90
Krzysztof Magiera	Łosiów	36,34
Michał Koźlik	Gliwice	28,47

Zadania z fizyki nr 564, 565

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

564. Na nieruchomym walcu o promieniu R leży nieważki pręt o długości $2l$, na którego końcach znajdują się małe kulki o masach m (rys. 1). Znaleźć okres małych drgań pręta wokół położenia równowagi. Nie ma poślizgu między walcem a prętem.

565. Po równoległych, poziomych szynach spiętych oporem R może poruszać się bez tarcia pręt o masie m. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B. Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny szyn (rys. 2). Odległość między szynami wynosi l. W chwili początkowej prętowi nadano prędkość v_0, równoległą do szyn. Jaką drogę przebędzie pręt do momentu zatrzymania? Jaki ładunek przepłynie w tym czasie przez opór R? Opór szyn i pręta zaniedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2013

Przypominamy treść zadań:

560. Jeżeli w pewnym inercjalnym układzie odniesienia istnieje tylko pole elektryczne $\vec{E}$, to w układzie poruszającym się z prędkością $\vec{v}$ względem układu pierwotnego, gdy możemy zaniedbać efekty relatywistyczne, istnieje również pole magnetyczne $\vec{B'} = -(\vec{v} \times \vec{E})/\mathrm{c}^2$, gdzie c jest prędkością światła. Sprawdź prawdziwość tego stwierdzenia na przykładzie pola od ładunku punktowego, rozważanego w obu układach.

561. Kondensator płaski umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (rys. 3). Napięcie między okładkami kondensatora wynosi U, odległość między okładkami h. Z punktu A wylatuje elektron prostopadle do linii pola magnetycznego. Jaki warunek musi spełniać prędkość elektronu, żeby przeleciał on przez kondensator bez kontaktu z jego okładkami? Siły ciężkości nie uwzględniamy, efekty relatywistyczne możemy zaniedbać.

560. Niech układ K' porusza się z prędkością $\vec{v}$ względem układu inercjalnego K. Rozważmy ładunek punktowy q spoczywający w początku układu K. Pole elektryczne od tego ładunku w punkcie opisanym wektorem położenia $\vec{r}$ ma postać: $\vec{E} = q\vec{r}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$. W układzie K' ładunek q porusza się prędkością $-\vec{v}$ i w przybliżeniu nierelatywistycznym możemy go potraktować jako stały prąd elektryczny. Natężenie prądu dane jest wzorem $I = q/\Delta t$, gdzie Δt jest czasem, w którym ładunek przemieszcza się o $\vec{\Delta l} = -\vec{v} \cdot \Delta t$. Stąd $I\vec{\Delta l} = -q\vec{v}$. Zgodnie z prawem Biota–Savarta pole magnetyczne wytworzone w układzie K' przez poruszający się ładunek ma postać:

$$\vec{B'} = \mu_0 I\vec{\Delta l} \times \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} = -\mu_0 q\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} = -mu_0\epsilon_0\vec{v} \times \vec{E} = -\vec{v} \times \frac{E}{\mathrm{c}^2}.$$

Gdy w pierwotnym układzie K obok pola elektrycznego występuje również pole magnetyczne $\vec{B}$, pole magnetyczne w układzie K' ma postać: $\vec{B'} = \vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/\mathrm{c}^2$. Jest to wzór przybliżony, słuszny jedynie dla $v \ll \mathrm{c}$, kiedy możemy zaniedbać opóźnienie związane ze skończonym rozchodzeniem się sygnału elektromagnetycznego. Otrzymany wzór pokazuje, że w przybliżeniu nierelatywistycznym pole magnetyczne nie zmienia się przy przejściu z jednego układu inercjalnego do innego.

561. W chwili początkowej na elektron działa siła elektryczna skierowana w górę i siła magnetyczna skierowana w dół. Rozważmy przypadek, gdy siły te równoważą się, czyli prędkość elektronu wynosi $v_0 = E/B = U/(hB)$. W układzie K związanym z kondensatorem elektron porusza się wtedy ruchem prostoliniowym z prędkością v_0. W układzie odniesienia K' poruszającym się względem K z prędkością $\vec{v_0}$ elektron ten spoczywa, czyli siła magnetyczna na niego nie działa. Oznacza to, że w układzie K' nie może również działać siła elektryczna, czyli w układzie tym nie ma pola elektrycznego. Elektron wylatujący z punktu A z prędkością $\vec{v}$ ma w układzie K' prędkość $\vec{v} - \vec{v_0}$ i porusza się po okręgu o promieniu $R = m|\vec{v} - \vec{v_0}|/(eB)$, stycznym do prostej równoległej do prędkości $\vec{v}$ (m i e oznaczają odpowiednio masę i wartość bezwzględną ładunku elektronu). Ponieważ mamy do czynienia z przypadkiem nierelatywistycznym, wektor indukcji pola magnetycznego w układzie K' nadal wynosi $\vec{B}$ (patrz zadanie 560). W układzie związanym z kondensatorem ruch elektronu jest złożeniem ruchu po okręgu oraz ruchu postępowego z prędkością $\vec{v_0}$. Elektron przeleci przez kondensator bez kontaktu z okładkami, gdy $2R < h/2$. Zatem prędkość elektronu musi spełniać warunki:

$$v < \frac{U}{hB} + \frac{eBh}{4m} \quad \text{oraz} \quad v > \frac{U}{hB} - \frac{eBh}{4m}, \text{ gdy } \frac{U}{hB} \geqslant \frac{eBh}{4m}, \text{ i } v \geqslant 0, \text{ gdy } \frac{U}{hB} < \frac{eBh}{4m}.$$