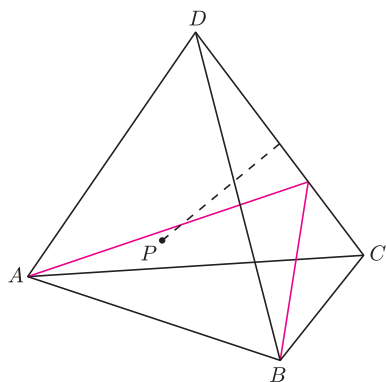


Kącik przestrzenny (19): Płaszczyzny przecinające się w punkcie

W tym kąciku przyjrzymy się metodom rozwiązywania zadań o przecinaniu się płaszczyzn. Jedną z nich jest wskazanie punktu przecięcia i udowodnienie, że należy do każdej z rozważanych płaszczyzn.



Rys. 1

1. (Zwardoń 2002) Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Przez każdą krawędź tego czworokąta prowadzimy płaszczyznę równoległą do prostej łączącej punkt P ze środkiem przeciwległej krawędzi (rys. 1). Wykazać, że istnieje punkt wspólny otrzymanych sześciu płaszczyzn.

Rozwiązanie. Wykażemy, że obraz symetryczny P' punktu P względem środka ciężkości G danego czworokąta należy do każdej z sześciu rozważanych płaszczyzn. Wystarczy, że udowodnimy, iż punkt P' należy do płaszczyzny π przechodzącej przez punkty A i B oraz równoległej do prostej łączącej punkt P ze środkiem krawędzi CD .

Niech M i N będą środkami krawędzi AB i CD (rys. 2). Punkt G jest środkiem odcinka MN , a więc czworokąt $MP'NP$ jest równoległobokiem. Zatem proste MP' i PN są równoległe. Skoro punkt M leży w płaszczyźnie π , to prosta MP' także. To dowodzi, że punkt P' należy do płaszczyzny π .

Jednym z klasycznych chwytów dowodzenia współpękowości trzech prostych na płaszczyźnie jest twierdzenie Cevy. Okazuje się, że ma ono swój odpowiednik w przestrzeni.

Twierdzenie Cevy. Dany jest czworokąt $ABCD$ i punkty A', B', C', D' leżące odpowiednio wewnątrz krawędzi AB, BC, CD, DA (rys. 3). Wówczas płaszczyzny ABC', BCD', CDA', DAB' przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = 1.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że dane płaszczyzny mają punkt wspólny P .

Ponieważ prosta $A'C'$ jest częścią wspólną płaszczyzn ABC' i CDA' , zaś prosta $B'D'$ jest częścią wspólną płaszczyzn BCD' i ADB' , więc punkt P należy do obu tych prostych (rys. 4). To dowodzi, że punkty A', B', C', D' leżą na jednej płaszczyźnie π .

Niech A_0, B_0, C_0, D_0 będą rzutami prostokątnymi punktów A, B, C, D na płaszczyznę π (rys. 5). Punkty A_0, A' i B_0 są współliniowe, co na mocy twierdzenia Talesa prowadzi do równości

$$\frac{AA'}{A'B} = \frac{AA_0}{BB_0}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{BB'}{B'C} = \frac{BB_0}{CC_0}, \quad \frac{CC'}{C'D} = \frac{CC_0}{DD_0}, \quad \frac{DD'}{D'A} = \frac{DD_0}{AA_0}.$$

Mnożąc otrzymane stosunki, dostajemy tezę.

Przyjmijmy teraz, że

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = 1.$$

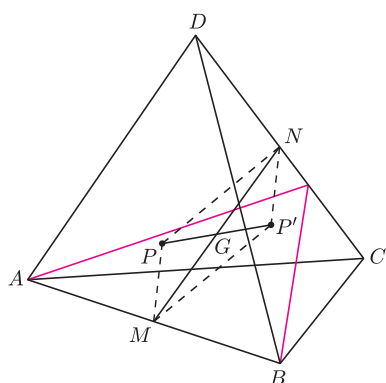
Niech E będzie punktem wspólnym odcinków AB' i CA' , zaś P punktem przecięcia płaszczyzny ABC' z odcinkiem DE (rys. 6). Punkt P należy do płaszczyzn ADB', CDA' i ABC' . Niech D'_0 będzie punktem przecięcia płaszczyzny BCP z krawędzią AD . Wtedy na mocy wcześniej udowodnionej części twierdzenia dostajemy

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'_0}{D'_0A} = 1.$$

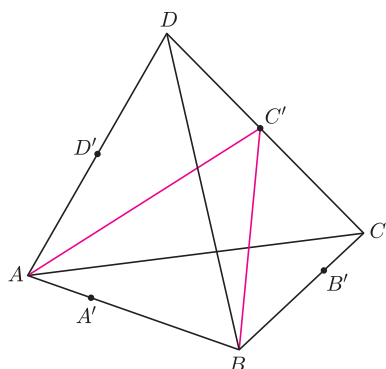
W takim razie

$$\frac{DD'}{D'A} = \frac{DD'_0}{D'_0A}.$$

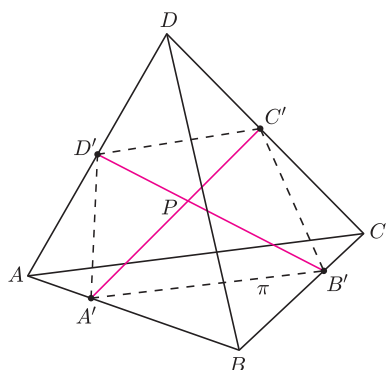
Stąd wniosek, że $D' = D'_0$, co kończy dowód twierdzenia.



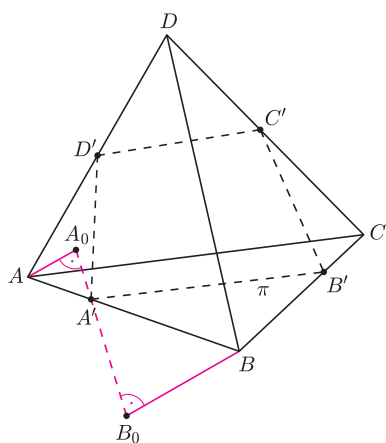
Rys. 2



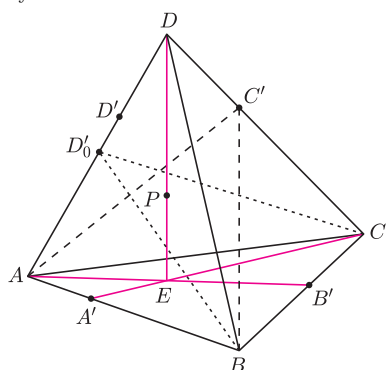
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Na koniec podajemy kilka zadań dla Czytelników.

2. (Zwardoń 2002) Przez środek każdej krawędzi czworościanu prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do przeciwległej krawędzi. Wykazać, że istnieje punkt wspólny otrzymanych sześciu płaszczyzn (punkt ten nazywa się punktem Monge'a).

3. Spodki wysokości pewnego czworościanu są różne od ortocentrow ścian, do których zostały poprowadzone. Wykazać, że płaszczyzny zawierające te wysokości i ortocentra ścian, do których zostały poprowadzone, przecinają się w jednym punkcie.

4. Dany jest czworościan $ABCD$. Odcinki AN i CM są dwusiecznymi w trójkącie ABC , odcinek BK jest dwusieczną w trójkącie BCD , zaś odcinek BL jest dwusieczną w trójkącie ABD . Wykazać, że istnieje punkt wspólny płaszczyzn ABK , BCL , ACM , ADN .

5. Twierdzenie Cevy (wersja trygonometryczna). Dany jest czworościan $A_1A_2A_3A_4$ i punkty $B_{i(i+1)}$ leżące na krawędziach $A_{i+2}A_{i+3}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ (przyjmujemy, że $A_{k+4} = A_k$). Każda z płaszczyzn $A_iA_{i+1}B_{i(i+1)}$ tworzy z płaszczyzną $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ kąt dwusieczny o mierze α_i , zaś z płaszczyzną $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ kąt dwusieczny o mierze β_i . Wykazać, że płaszczyzny $A_iA_{i+1}B_{i(i+1)}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ mają wspólny punkt wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\sin \beta_3} \cdot \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_4} = 1.$$

6. Punkt P leży wewnątrz czworościanu $A_1A_2A_3A_4$. Wykazać, że płaszczyzny symetryczne do płaszczyzn $A_iA_{i+1}P$ względem płaszczyzn dwusiecznych kątów dwusiecznych przy krawędziach A_iA_{i+1} dla $i = 1, 2, 3, 4$ przecinają się w jednym punkcie.

Michał KIEZA

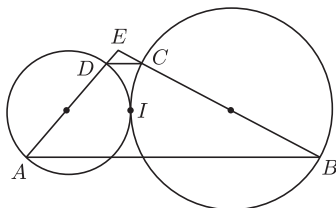


Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1399. Dany jest trapez $ABCD$. Ramiona AD i BC przecinają się w punkcie E i są średnicami okręgów stycznych zewnętrznie w punkcie I (rys. 1). Udowodnić, że I leży na dwusiecznej kąta AEB .

Rozwiązanie na str. 6



Rys. 1

M 1400. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$, taka, że $p + 2$ też jest pierwsza. Na tablicy napisano liczby $1, 2, \dots, p$. W każdym kroku wybieramy jedną z nich, powiedzmy k , po czym zmazujemy wszystkie dzielniki liczby $k + p$. Udowodnić, że w ten sposób nigdy nie zmażemy wszystkich liczb napisanych na tablicy.

Rozwiązanie na str. 2

M 1401. Udowodnić, że dla $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ prawdziwa jest nierówność

$$1/\cos \alpha + 1/\cos \beta \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie na str. 22

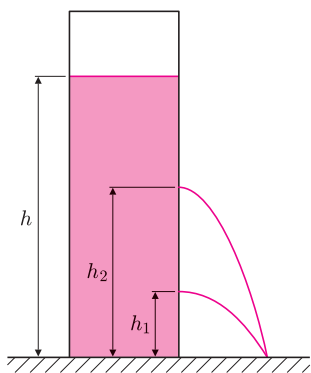
Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

F 841. Woda wypływa ze zbiornika przez dwa leżące jeden nad drugim otwory, jak to przedstawiono na rysunku 2. Jeden otwór znajduje się na wysokości $h_1 = 20$ cm, a drugi na wysokości $h_2 = 50$ cm powyżej podstawy zbiornika. Strugi wody wypływającej ze zbiornika przez te otwory trafiają w to samo miejsce na wysokości podstawy. Ile wynosi poziom wody w zbiorniku?

Rozwiązanie na str. 10

F 842. Im większa jest energia kinetyczna pocisku w chwili uderzenia w cel, tym większa jest „skuteczność strzału”. Czy przy tym samym ładunku materiału wybuchowego naboju (tej samej energii początkowej pocisku) „skuteczność strzału” rośnie z masą pocisku, czy maleje? Przyjmujemy, że prędkość pocisku jest podczas całego lotu mniejsza od prędkości dźwięku.

Rozwiązanie na str. 17



Rys. 2