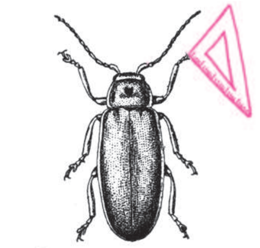
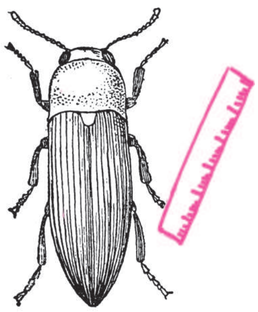
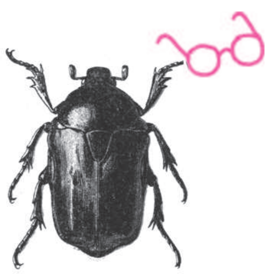
Czy matematyk pracuje, czy się bawi?



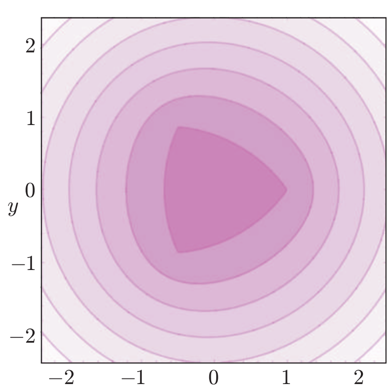
Homo oeconomicus



Homo oecologicus



Homo libertinus



Poziomice funkcji

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+ \\ +\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+ \\ +\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-2\sqrt{3}.$$

Zawód matematyka ma wiele zalet.

Homo oeconomicus za główną z nich uważa taniość. Faktycznie, obiekty badań matematyków nie są z tego świata, nie można zatem kupić ich ani w specjalistycznej hurtowni, ani w supermarkecie, ani nawet w osiedlowym sklepiku.

Homo oecologicus jako główną zaletę wymieni fakt, iż matematyczne obiekty nie podlegają cywilizacyjnym zanieczyszczeniom i wynikającym z nich deformacjom.

Homo logisticus wskaże obywanie się bez laboratoriów, a nawet właściwie bez odpowiednich pomieszczeń. Matematykę istotnie można uprawiać wszędzie.

Homo libertinus wskaże niezależność matematyki od ideologii i polityki.

Są wreszcie i tacy, którzy są przekonani, iż myśl matematyczna buja w nieosiągalnych dla niematematyków przestworzach i tym sposobem jest bardziej niezależna niż jakakolwiek inna myśl.

Wszystko to pewnie prawda, ale moje obserwacje kolegów matematyków kazałyby mi wymienić dwie inne, wyróżniające ten zawód zalety. Pierwsza z nich to nieprawdopodobna wręcz obfitość problematyki – nie sposób wymienić sytuację, która nie mogłaby stać się inspiracją do podjęcia matematycznego dociekania. Druga zaś to fakt, że matematyk pracując, bawi się, że praktycznie każda forma zabawy może posłużyć jako alegoria matematycznych dociekań.

Ostatnio miałem okazję zaobserwować to w niemal czystej formie. Jeden z moich kolegów – nazwijmy go Jurkiem – szperał po artykułach w różnych czasopismach, poszukując przykładu zależności, która miała upoglądowić prezentację jego aktualnych prac. I tak trafił na artykuł Junpei Sekino *n-Ellipses and the minimum distance sum problem* w American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 3 (1999), 193–202.

Niezależnie od powodu napisania wymienionego artykułu, możemy w nim znaleźć definicję n-elipsy jako zbioru punktów, których suma odległości od danych n punktów jest stała. Gdy jako punkty weźmiemy wierzchołki n-kąta foremnego, a sumie odległości każemy być równą odległości jednego z nich od pozostałych, to powstanie właśnie figura, której własności były potrzebne Jurkowi. W szczególności chciał wiedzieć, czy krzywa ta jest gładka, czy też może ma dziobki. Oczywiście, dziobki mogłyby się pojawić tylko w wierzchołkach n-kąta. Ale jak stwierdzić, czy są?

Kiedy zapoznał mnie ze swoim problemem, postanowiłem to sprawdzić w najprostszej sytuacji, czyli dla trójkąta. A że nie miałem sensownego pomysłu, więc zacząłem liczyć, co okazało się do tego stopnia męczące, że tę drogę poszukiwania odpowiedzi uznałem za głupią. Powiedziałem też o tym przy jakiejś okazji koledze – nazwijmy go Zbyszkiem. Ten uznał, że moje trudności to jeszcze jeden przykład na to, jak jestem zacofany, i wpuścił rzecz do *Mathematiki*, która stwierdziła, że krzywa jest gładka. Ale to mu nie odpowiadało, więc poszukał błędu w swoim wpuszczaniu, znalazł go, poprawił i wtedy *Mathematica* powiedziała (i pokazała – patrz rysunek), że dziobki są.

No i wtedy zawstydził się, że zabrał się do geometrii z komputerem – to tak, jakby z nożem do ryby. Więc rozwiązał problem dla trójkąta metodami klasycznej geometrii, ale tak go to rozochociło, że odkrył, o co tak naprawdę w tym problemie chodzi, i rozwiązał go klasycznie dla dowolnego n, co jest przedstawione na następnych stronach.

W moim przekonaniu dowodzi to niezbicie tego, od czego zacząłem ten tekst.

Marek

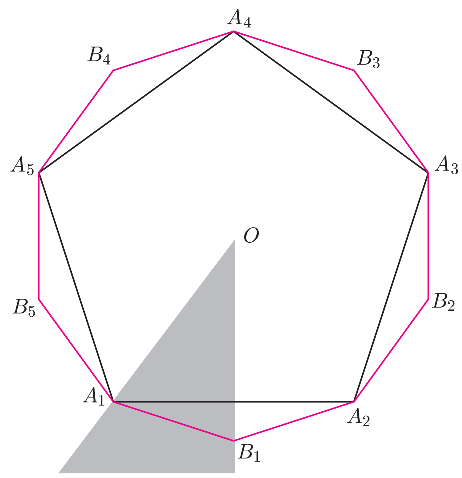
Zadanie – przypadek ogólny. Wykazać, że jeśli $A_1 \ldots A_n$ jest n-kątem foremnym, to krzywa płaska K, składająca się z punktów X, spełniających warunek

$$|XA_1| + |XA_2| + \ldots + |XA_n| = |A_1A_1| + |A_1A_2| + \ldots + |A_1A_n|,$$

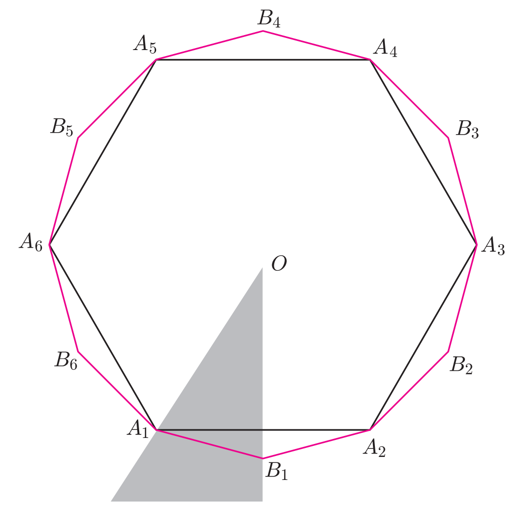
ma ostrza w wierzchołkach A_i wielokąta.

Rozwiązanie rozpoczniemy od dowodu następującej obserwacji.

Stwierdzenie. Krzywa K jest zawarta w $2n$-kącie foremnym $A_1B_1 \ldots A_nB_n$.



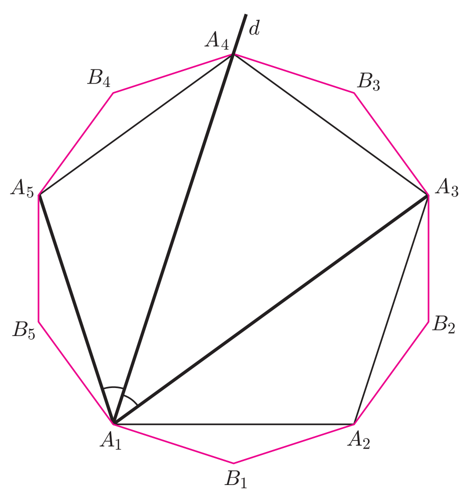
Rys. 1



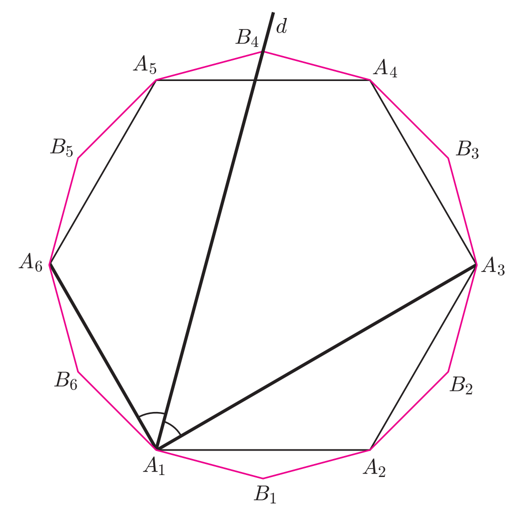
Rys. 2

Dowód. Ponieważ symetrie wielokąta $A_1 \ldots A_n$ przeprowadzają krzywą K na siebie, wystarczy udowodnić, że każdy punkt krzywej K, leżący w kącie A_1OB_1, jest punktem trójkąta A_1OB_1.

W tym celu rozważmy dwusieczną d kąta $A_3A_1A_n$:



Rys. 3



Rys. 4

Gdy n jest nieparzyste, jest to prosta $A_1A_{(n+3)/2}$; gdy n jest parzyste, dwusieczną jest prosta $A_1B_{(n+2)/2}$.

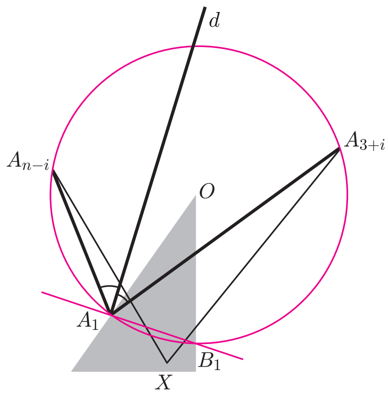
Wykażemy, że $d \perp A_1B_1$. W tym celu zauważmy, że $\sphericalangle A_3A_1A_2 = \frac{\pi}{n}$ oraz $\sphericalangle A_2A_1B_1 = \frac{\pi}{2n}$, jako kąty wpisane oparte odpowiednio na $\frac{1}{n}$ lub $\frac{1}{2n}$ części okręgu opisanego. W podobny sposób ustalamy, że $\sphericalangle A_3A_1A_n = \frac{(n-3)\pi}{n}$. Wobec tego kąt, jaki tworzy prosta d z prostą A_1B_1, jest równy

$$\frac{1}{2}\sphericalangle A_3A_1A_n + \sphericalangle A_3A_1A_2 + \sphericalangle A_2A_1B_1 = \frac{(n-3)\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 1400. Przypuśćmy przeciwnie, że po pewnej liczbie kroków zmazaliśmy wszystkie liczby. Powiedzmy, że w ostatnim kroku wybraliśmy liczbę l. Skoro została ona zmazana, to $l \mid p + l$, czyli również $l \mid p$, a zatem $l = 1$ lub $l = p$.

Wykażemy najpierw, że musieliśmy wykonać co najmniej trzy kroki. Jest jasne, że wykonaliśmy więcej niż jeden. Przypuśćmy więc, że po dwóch krokach wszystkie liczby zostały zmazane. Niech k i l będą odpowiednio liczbami wybranymi w pierwszym i drugim kroku. Ponieważ liczba 1 zniknęła z tablicy po pierwszym kroku, więc $l = p$, co oznacza, że po pierwszym kroku na tablicy były wyłącznie liczby 2 i p lub tylko p. Ponieważ $2 < p - 1 < p$, więc $p - 1$ zmazaliśmy w pierwszym kroku, a zatem $p - 1 \mid p + k$. Natomiast z nierówności $p - 1 < p + k < 3(p - 1)$ wynika, że $p + k = 2(p - 1)$, czyli $k = p - 2$. Ale $p - 2$ też musiało zostać zmazane w pierwszym kroku, więc $p - 2 \mid 2(p - 1)$, co jest niemożliwe.

Załóżmy teraz, że w przedostatnim kroku (który nie jest jednocześnie pierwszym) wybraliśmy liczbę m. Ta liczba nie została zmazana w tym kroku, gdyż $m \mid m + p$ oznacza, że $m = 1$ lub $m = p$, ale 1 zniknęła w pierwszym kroku, a p musi być wybrane w ostatnim. Zatem m zmazujemy w ostatnim kroku, czyli $m \mid 2p$, więc $m = 2$. Wobec tego w przedostatnim kroku mogliśmy wymazać tylko dzielniki liczby $p + 2$. Ale ta liczba jest pierwsza, więc nie wymazaliśmy nic, co daje sprzeczność.



Rys. 5

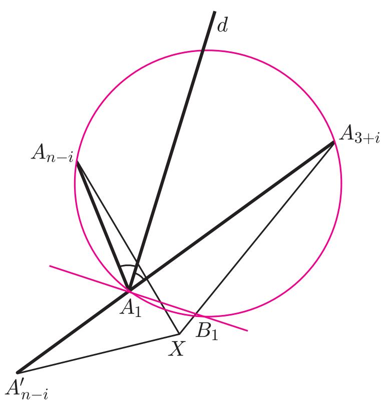
Zauważmy, że prosta d jest też dwusieczną każdego z kątów $A_{3+i}A_1A_{n-i}$, dla $i = 0, 1, \ldots, \lfloor (n-4)/2 \rfloor$, gdyż każdy z tych kątów powstaje z kąta $A_3A_1A_n$ przez odjęcie po obu stronach dwusiecznej tej samej wielokrotności kąta o mierze $\frac{\pi}{n}$.

Rozważmy jeden z tych kątów oraz pewien punkt X, który należy do kąta A_1OB_1, ale leży poza trójkątem A_1OB_1 (rys. 5).

Wykażemy, że $|XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geqslant |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}|$. W tym celu odbijemy punkt A_{n-i} symetrycznie względem prostej A_1B_1 (rys. 6).

Z tego, że d jest dwusieczną kąta $A_{3+i}A_1A_{n-i}$ oraz $d \perp A_1B_1$, wynika, że punkty A'_{n-i}, A_1, A_{3+i} są współliniowe. Mamy zatem dla $0 \leqslant i \leqslant \lfloor (n-4)/2 \rfloor$

$$(*) \qquad |XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geqslant |XA'_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geqslant |A'_{n-1}A_{3+i}| = \\ = |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}|,$$



Rys. 6

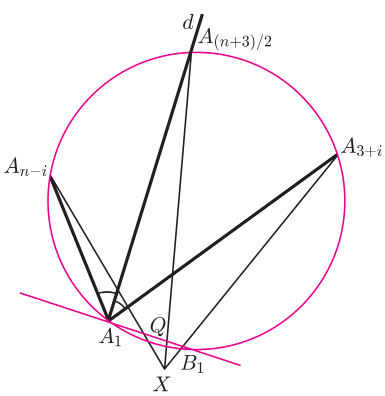
Gdy n jest liczbą parzystą, każdy z wierzchołków $A_3, \ldots, A_n$ występuje w dokładnie jednej z powyższych nierówności $(*)$. Mamy zatem

$$|XA_1| + |XA_2| + \ldots + |XA_n| = \\ = |XA_1| + |XA_2| + \sum_{i=0}^{(n-4)/2} |XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geqslant \\ \geqslant |XA_1| + |XA_2| + \sum_{i=0}^{(n-4)/2} |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}| > \\ > |A_1A_2| + \sum_{i=0}^{(n-4)/2} |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}| = \sum_{j=2}^{n} |A_1A_j|.$$

Gdy n jest liczbą nieparzystą, w nierównościach $(*)$ występują wszystkie wierzchołki $A_3, \ldots, A_n$ z wyjątkiem $A_{(n+3)/2}$, który wtedy leży na prostej d (rys. 7).

Jeśli Q jest punktem przecięcia odcinków $XA_{(n+3)/2}$ oraz A_1B_1, to mamy

$$|XA_{(n+3)/2}| \geqslant |QA_{(n+3)/2}| \geqslant |A_1A_{(n+3)/2}|,$$



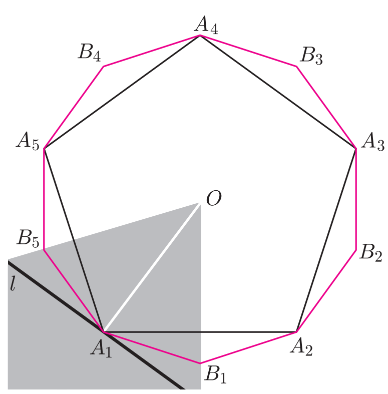
Rys. 7

gdyż trójkąt $QA_1A_{(n+3)/2}$ jest prostokątny. Wynika stąd

$$|XA_1| + |XA_2| + \ldots + |XA_n| = \\ = |XA_1| + |XA_2| + |XA_{(n+3)/2}| + \sum_{i=0}^{(n-5)/2} |XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geqslant \\ \geqslant |XA_1| + |XA_2| + |A_1A_{(n+3)/2}| + \sum_{i=0}^{(n-5)/2} |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}| > \sum_{j=2}^{n} |A_1A_j|.$$

W każdym więc przypadku punkt X nie należy do krzywej K, co kończy dowód stwierdzenia.

Łatwo teraz wykazać, że krzywa K nie jest gładka w punktach A_i, to znaczy nie ma w tych punktach stycznej. Ze względu na niezmienniczość K na obroty wielokąta wystarczy przeprowadzić dowód dla jednego z wierzchołków, np. dla A_1 (rys. 8).



Rys. 8

Oczywiście, $A_1 \in K$. Zauważmy, że punkty krzywej K, leżące w pobliżu punktu A_1, są zawarte w kącie $B_1A_1B_n$. Gdyby prosta ℓ była styczna do krzywej K w punkcie A_1, to z niezmienniczości K ze względu na symetrię w prostej OA_1 wynikałoby, że $\ell \perp OA_1$. Ale wtedy, z definicji stycznej jako granicy siecznych wynika, że istnieje taki ciąg punktów $X_i \in K$, że kąty, jakie tworzą wektory X_iA_1 z prostą ℓ, dążą do zera, czyli $\sphericalangle OA_1X_i \to \frac{\pi}{2}$. Tymczasem mamy zawsze

$$\sphericalangle OA_1X_i \leqslant \sphericalangle OA_1B_1 = \sphericalangle OA_1A_2 + \sphericalangle A_2A_1B_1 = \\ = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n},$$

sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.

Udział wzięli Marek KORDOS, Zbigniew MARCINIAK, Jerzy TYSZKIEWICZ

Szanowny Czytelniku, okazuje się, że obok zwykłego świata, znanego wszystkim nam od dziecka, istnieje też świat alternatywny, w którym jest zanurzone studiowanie i ogół pracy wielu polskich uczelni. Co więcej, świat ten pozwala na teleportację do analogicznych światów stowarzyszonych z uczelniami innych krajów. Ten **alternatywny świat to USOS.**

Wiemy, że USOS dla wielu jest równie egzotyczny jak tolkienowskie krainy i, podobnie jak one, tajemniczy i groźny. Dlatego często nie chcą o niego pytać, zarówno by nie ujawnić swojej niewiedzy, jak by nie dowiedzieć się o swoich względem niego powinnościach, wreszcie by nie wpaść w kompleksy, gdy odpowiedź okaże się niezrozumiała.

Z tego powodu poprosiliśmy Twórców USOS-a o reportaże ze stworzonego przez nich świata. I – aby tak nas, jak naszych Czytelników nie wpędzać w kompleksy – zasugerowaliśmy, by owe reportaże były ucharakteryzowane na listy do młodego badacza, na początku cyklu – kandydata na studia.

Spodziewamy się jedenastu listów – oto pierwszy z nich, poprzedzony stosowną preambułą.

Redakcja

Ze świata USOS

*Pewno nie wiesz, co to USOS. Dokładniej pewno **jeszcze** nie wiesz, co to USOS, bo jeśli planujesz studia na polskiej uczelni, to z dużym prawdopodobieństwem (rzędu 2/5, o ile to będzie uczelnia publiczna) poznasz USOS, a – co może ważniejsze – USOS pozna Ciebie i umożliwi Ci surfowanie po uczelnianym świecie wirtualnym. No dobrze, USOS to nickname (czyli ksywka) **Uniwersyteckiego Systemu Obsługi Studiów** – systemu informatycznego, który wspiera studentów, nauczycieli akademickich i uczelnianą administrację we wszystkim, co się wiąże z dydaktyką, od drukowania elektronicznych legitymacji studenckich, po rejestrację na zajęcia, pełnienie roli elektronicznego indeksu, archiwizowanie prac dyplomowych i wydawanie dyplomów ukończenia studiów. USOS to złożony twór, o rozbudowanej, rozproszonej architekturze, zaawansowanych mechanizmach komunikacji i synchronizacji danych, napisany w różnych technologiach, implementujący wiele ciekawych algorytmów, skalowalny, będący bogatym źródłem danych nie tylko dla uczelnianej administracji, lecz także dla statystyków, socjologów, psychologów czy speców od zarządzania. O takich systemach mówi się czasem, że stanowią zintegrowaną platformę informatyczną – zintegrowaną (gdyż potrafią się ze sobą porozumieć i wymienić dane) z innymi systemami informatycznymi, które wspierają funkcjonowanie uczelni wyższej.*

USOS powstaje na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, rękoma pracowników i studentów, informatyków i matematyków. My – twórcy USOS – chcemy Wam zdradzić trochę sekretów kuchni. W kolejnych odcinkach opowiemy o tym, co, naszym zdaniem, w USOS-ie jest ciekawe, ambitne, co stanowi prawdziwe wyzwanie i dzięki czemu praca przy nim jest taką frajdą.

Zapraszamy do świata USOS.

Janina MINCER-DASZKIEWICZ z zespołem

Część 1 – Skąd USOS mnie zna i jakie są moje prawa, czyli o zarządzaniu tożsamością

Załóżmy, że dałeś się przekonać do studiowania na Uniwersytecie Warszawskim, na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki (bądź dowolnym innym wydziale dowolnej innej z USOS-owych uczelni).

Dziewczyny też u nas studiują, a jakże, ale na potrzeby przykładu załóżmy, że mowa o studencie płci męskiej.

Zakładasz sobie konto w systemie *Internetowej Rekrutacji Kandydatów* (o wdzięcznej nazwie IRKa, `http://irk.uw.edu.pl`), podając swój PESEL (który będzie pełnił rolę identyfikatora konta) i wymyślone przez siebie hasło (to ważne, bo – jak się zaraz okaże – będzie Ci ono służyć długo i lepiej, żeby nikt inny go nie poznał). Możesz zresztą skorzystać ze swojego konta na platformie ePUAP (ale to całkiem inna historia, o której może napiszemy później).

ePUAP to elektroniczna *Platforma Usług Administracji Publicznej*, która umożliwia (między innymi) wiarygodną weryfikację tożsamości. Żeby założyć konto w ePUAP, trzeba poświadczyć tożsamość w przeznaczonym do tego urzędzie administracji państwowej. Niektóre aplikacje internetowe, takie jak np. IRKa, uwierzytelniają użytkownika za pomocą jego identyfikatora i hasła w ePUAP.

Któregoś dnia logujesz się do IRKi i bingo! Zostałeś przyjęty. Musisz raz odbyć osobistą wycieczkę do dziekanatu, żeby złożyć papiery, ale potem jedziesz wreszcie na zasłużone wakacje. We wrześniu chciałbyś jednak poznać swój plan zajęć, wyczytałeś też w USOSowni (to taki portal informacyjny dla studentów UW, `http://usosownia.uw.edu.pl`), że wkrótce ruszają rejestracje na wuefy i oguny (przedmioty ogólnouniwersyteckie). Wchodzisz na stronę USOSweba