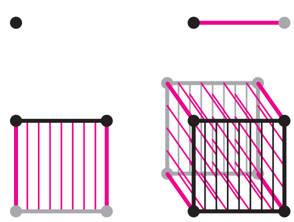
Sześciany i wielomiany

Joanna JASZUŃSKA

Ile wierzchołków, krawędzi, ścian dwuwymiarowych, trójwymiarowych etc. ma n-wymiarowy sześcian? Przyjrzyjmy się dobrze znanym sześcianom zero-, jedno-, dwu- i trójwymiarowym. Sześcian zerowymiarowy to punkt – jeden wierzchołek. Sześcian jednowymiarowy to odcinek – dwa wierzchołki połączone krawędzią. Sześcian dwuwymiarowy to kwadrat – dwa odpowiednio połączone odcinki.



Rys. 1. Kolejne sześciany n-wymiarowe. Na czarno i szaro narysowano poprzedni sześcian i jego drugi egzemplarz, kolorem zaznaczono ślad przy przesuwaniu.

Można sobie wyobrażać, że sześcian n-wymiarowy powstaje z sześcianu $(n-1)$-wymiarowego przez przesunięcie go w n-tym wymiarze (rys. 1). Ma więc dwukrotnie więcej wierzchołków, krawędzi i ścian każdego wymiaru (odpowiadających początkowemu i końcowemu położeniu przesuwanego sześcianu), a dodatkowo ma krawędzie i ściany otrzymane jako ślady przy przesuwaniu. Wierzchołek jako swój ślad pozostawia krawędź, śladem krawędzi jest ściana dwuwymiarowa i ogólniej, śladem ściany k-wymiarowej jest ściana $(k+1)$-wymiarowa.

Istotnie, sześcian trójwymiarowy, otrzymany jako przesunięcie przedniej kwadratowej ściany tak, by uzyskać tylną, ma:

- $2 \cdot 4 = 8$ wierzchołków (dwukrotność tego, co kwadrat),
- $2 \cdot 4 + 4 = 12$ krawędzi (dwukrotność tego, co kwadrat, plus liczba wierzchołków kwadratu – powstały z nich krawędzie łączące przód i tył),
- $2 \cdot 1 + 4 = 6$ ścian dwuwymiarowych (dwukrotność tego, co kwadrat, plus liczba krawędzi kwadratu – powstały z nich ściany górna, dolna, prawa i lewa),
- jedną ścianę trójwymiarową (wnętrze, otrzymane jako ślad wnętrza przesuwanego kwadratu).

n	w_0	k_1	s_2	s_3	s_4
0	1				
1	2	1			
2	4	4	1		
3	8	12	6	1	
4	16	32	24	8	1

Rys. 2. n – wymiar sześcianu, w_0 – liczba wierzchołków, k_1 – krawędzi, s_d – ścian d-wymiarowych.

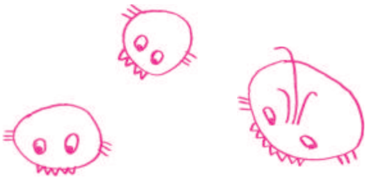
Podsumowując, stwórzmy tabelę (rys. 2). Wartości w kolejnym wierszu powstają przez podwojenie poprzednich i dodanie do tego poprzednich przesuniętych o jedno miejsce. Tą metodą otrzymujemy ostatni z wypisanych wierszy, dla sześcianu czterowymiarowego. Podobnie można wyznaczać dalsze wartości, choć szukanie w ten sposób np. liczby 19-wymiarowych ścian w sześcianie 42-wymiarowym byłoby dość nużące.

Sumy liczb w kolejnych wierszach to 1, 3, 9, 27, 81 – potęgi trójki. Tak być musi, bo każdy wyraz poprzedniego wiersza wliczany jest w następnym wierszu trzykrotnie: raz podwojony i jeszcze raz, po przesunięciu, dodany.

Na przemian dodając i odejmując wyrazy, uzyskujemy w wierszach 1, $2-1=1$, $4-4+1=1$, $8-12+6-1=1$, $16-32+24-8+1=1$, … Czy dalej też wychodzi 1?

Rozważmy wielomiany $(2+x)^n$. Dla $n = 0, 1, 2, 3$ mamy:

$$1,$$
$$2+x,$$
$$4+4x+x^2,$$
$$8+12x+6x^2+x^3.$$



Następny wiersz powstaje z poprzedniego poprzez pomnożenie przez $2+x$, czyli pomnożenie poprzedniego wiersza przez 2 oraz dodanie do tego poprzedniego wiersza pomnożonego przez x, a więc „przesuniętego”.

Współczynniki wyżej wypisanych wielomianów są takie same, jak liczby w początkowych wierszach tabeli z rysunku 2. W następnych wierszach też uzyskamy tutaj takie same liczby, jak tam, bo procedura ich tworzenia jest identyczna. Stąd **liczba k-wymiarowych ścian w n-wymiarowym sześcianie to współczynnik przy x^k w wielomianie $(2+x)^n$, czyli $\binom{n}{k}2^{n-k}$.**

Wzór $\binom{n}{k}2^{n-k}$ wynika z dwumianu Newtona: $(2+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} x^k$.

Sześcian 42-wymiarowy ma więc $\binom{42}{19}2^{42-19} = \frac{42!}{19! \cdot 23!} \cdot 2^{23} = 3\,747\,822\,946\,379\,366\,400$ ścian 19-wymiarowych.

Suma liczb w n-tym wierszu rysunku 2 to suma współczynników wielomianu $(2+x)^n$, czyli jego wartość dla $x=1$, a więc $(2+1)^n = 3^n$.

Z kolei naprzemienna suma liczb z n-tego wiersza to wartość tego wielomianu dla $x=-1$, czyli $(2-1)^n = 1$, zatem faktycznie zawsze równa jest 1.