Siatka czworościanu

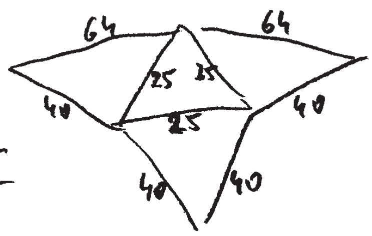
Marcin KUCZMA[*]

Czworościan to ostrosłup. Wybieramy jedną ścianę – „podstawę”; trzy ściany „boczne” odchylamy na zewnątrz, jakby były na zawiasach. Gdy się ułożą w płaszczyźnie podstawy, uzyskamy układ czterech trójkątów – płaską *siatkę* czworościanu; może ona ułatwić (lub utrudnić) jego wizualizację.

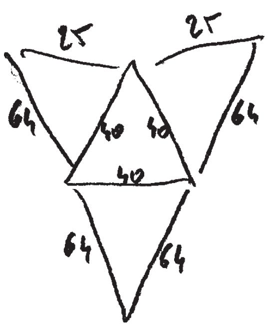
W zawodach okręgowych LXIV Olimpiady Matematycznej pojawiło się zadanie: Czy istnieje para czworościanów, których ściany można ponumerować odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 tak, by dla $i = 1, 2, 3, 4$ ściana S_i była trójkątem podobnym do S'_i, a przy tym te czworościany nie są bryłami podobnymi?

Pomysł zadania: Jerzy Bednarczuk.

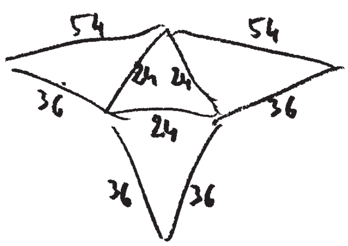
Nietrudno zgadnąć, że takie pary istnieją. Uczestnicy zawodów wskazywali różne przykłady. Najczęściej rysowali siatki czworościanów, podając długości krawędzi. Rysunki – bez zachowania proporcji – należało traktować wyłącznie jako schematy, jak tu obok. Widzimy jedną parę siatek, I i II, oraz inną parę, III i IV. W obu tych parach podobieństwa $S_i \sim S'_i$ są jasne; przy tym skala podobieństwa pewnych par trójkątów jest różna od skali innych par, dlatego siatki reprezentują bryły niepodobne.



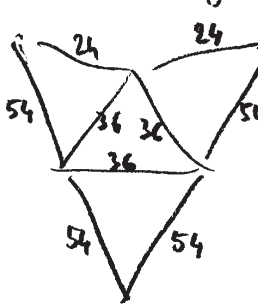
I



II



III



IV

Który przykład lepszy? Istotnej różnicy niby nie widać. Gdyby rysunki były staranne, może dostrzeglibyśmy, że różnica jest zasadnicza. Z trójkątów w schematach I i II nie da się w przestrzeni złożyć czworościanów! Z siatek III i IV – da się. Jak to uzasadnić?

Są różne sposoby – na przykład tak: wysokości dwóch trójkątów równoramiennych, widocznych w siatce III, wynoszą $h_1 = 12\sqrt{3}$ i $h_2 = 24\sqrt{2}$; deltoid utworzony przez te trójkąty zaczynamy zginać wzdłuż przekątnej i chcemy, by poruszające się wierzchołki znalazły się w odległości $d = 54$; do tego potrzeba i wystarcza, by był spełniony warunek $|h_1 - h_2| < d < h_1 + h_2$, co dla tych wartości szczęśliwie ma miejsce. Podobnie w układzie IV – ale nie w układach I i II; one *nie są* siatkami czworościanów.

Obejrzenie licznych przykładów – dobrych i złych – w sposób naturalny rodzi pytanie: dany trójkąt o bokach a, b, c oraz trzy odcinki o długościach p, q, r; znaleźć warunek algebraiczny konieczy i dostateczny, by istniał czworościan o podstawie (a, b, c) i krawędziach p, q, r, odpowiednio przeciwległych do a, b, c. Otóż da się (być może, nieoczekiwanie) uzyskać ów warunek, rachując na liczbach zespolonych – w płaszczyźnie podstawy.

Nie tracimy ogólności przyjmując, że wierzchołki podstawy są reprezentowane przez liczby zespolone o module $|x| = |y| = |z| = 1$ (zysk dobrze znany: $\overline{x} = 1/x$). Wówczas

$$(1)\quad a^2 = |y - z|^2 = (y - z)(\overline{y} - \overline{z}) = -\frac{(y - z)^2}{yz}, \quad b^2 = -\frac{(z - x)^2}{zx}, \quad c^2 = -\frac{(x - y)^2}{xy}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(2)\qquad w = (x - y)(y - z)(z - x); \quad \text{wtedy} \quad \overline{w} = -\frac{w}{(xyz)^2}; \quad |w| = abc.$$

Dalej przydadzą się jeszcze takie zależności (oszczędzimy Czytelnikom szczegółowych rachunków, zachęcając do samodzielnego ich uzupełnienia):

$$(3)\qquad b^2 + c^2 - a^2 = \frac{(z - x)(x - y)(y + z)}{xyz}, \qquad a^2(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{wx(z^2 - y^2)}{(xyz)^2}.$$

Teraz trochę geometrii. Okręgi o_x, o_y, o_z o środkach x, y, z i promieniach p, q, r są okręgami wielkimi trzech sfer w przestrzeni. Nasze pytanie brzmi: czy te sfery mają punkt wspólny? Punkt ów byłby wierzchołkiem szukanego ostrosłupa. Spodek opuszczonej z niego wysokości musi leżeć na prostej przechodzącej przez punkty przecięcia okręgów o_x, o_y; również na analogicznej prostej dla okręgów o_x, o_z i dla o_y, o_z (jeżeli któreś dwa okręgi się nie przecinają, to sfery na pewno się nie spotkają).

Problem sprowadza się do pytania płaskiego: czy trzy osie potęgowe, utworzone dla trzech par z tej trójki okręgów, przecinają się w punkcie, leżącym *wewnątrz* nich?

Punkt ów jest reprezentowany przez liczbę zespoloną f, scharakteryzowaną równościami

$$(4)\qquad |f - x|^2 - p^2 = |f - y|^2 - q^2 = |f - z|^2 - r^2.$$

Oznaczmy tę wspólną wartość przez e; to potęga punktu f względem każdego z trzech okręgów. Czworościan, o który chodzi, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $e < 0$.

Gdy zapiszemy $|f - x|^2$ jako $(f - x)(\overline{f} - 1/x)$ (podobnie $|f - y|^2$, $|f - z|^2$) i wymnożymy nawiasy, składnik $f \cdot \overline{f}$ w równaniach (4) ulegnie redukcji, pozostawiając układ dwóch równań liniowych z niewiadomymi f, $\overline{f}$.

[*]Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

To są *sumy cykliczne* (w trójkach (x, y, z), (p, q, r), (a, b, c)). Na przykład napis

$$\sum \frac{fpxy}{3wb}$$

należałoby odczytać jako

$$\frac{fpxy}{3wb} + \frac{fqyz}{3wc} + \frac{frzx}{3wa}.$$

Jego rozwiązanie jest natychmiastowe i daje wynik

$$(5)\qquad f = \frac{xyz}{w} \sum p^2(y-z), \qquad \overline{f} = \frac{1}{w} \sum p^2 x(y-z).$$

Liczba e, równa każdemu z trzech wyrażeń, występujących w (4), jest oczywiście także ich średnią arytmetyczną:

$$(6)\qquad e = \frac{1}{3} \sum \big(|f-x|^2 - p^2\big) = f\overline{f} - \frac{1}{3} \sum \big(x\overline{f} + \frac{f}{x}\big) + 1 - \frac{1}{3} \sum p^2.$$

Po wprowadzeniu wzorów (5) i uporządkowaniu wszystkiego według potęg p, q, r dostaniemy wielomian względem p^2, q^2, r^2, w którym jako współczynniki pojawią się – po krótkich przekształceniach – wyrażenia, napisane po prawych stronach równości (3), mnożone lub dzielone przez pewne potęgi liczby w oraz iloczynu xyz. Uwzględniając jeszcze związki (2), pozbywamy się w ogóle liter x, y, z, w i doprowadzamy do wyniku

Zamiast prowadzić wymyślne przekształcenia według podanych wskazówek, wystarczy po prostu sprawdzić (ręcznie lub komputerowo), że różnica prawych stron wzorów (6) i (7), po podstawieniu wyrażeń (1), (2), (5), jest równa 0.

$$(7)\qquad e = -\frac{L}{(abc)^2}, \qquad L = -(abc)^2 + \sum \big((b^2+c^2-a^2)(a^2p^2+q^2r^2) - a^2p^4\big).$$

Licznik L można zapisać w równoważnych postaciach (Czytelniku, sprawdź!):

$$(8)\qquad L = \sum a^2p^2(b^2+c^2-a^2+q^2+r^2-p^2) + \frac{1}{2}\prod(p^2-a^2) - \frac{1}{2}\prod(p^2+a^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 0 & p^2 & q^2 & r^2 & 1 \\ p^2 & 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ r^2 & b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

zaś warunek istnienia czworościanu brzmi: $L > 0$.

Jego ściany to trójkąty o bokach (a, b, c), (a, q, r), (b, r, p), (c, p, q). Z postaci wyznacznikowej wzoru (8) widać, że nic się nie zmieni, gdy inną z tych trójek – np. (b, r, p) – przyjmiemy za ścianę podstawy. Dokładniej: po zastąpieniu szóstki uporządkowanej (a, b, c, p, q, r) przez (b, r, p, q, c, a) wartość L będzie taka sama; w wyznaczniku nastąpi jednoczesna permutacja wierszy i kolumn.

Zaczęliśmy od *trójkąta* o bokach a, b, c oraz trójki liczb p, q, r. Gdyby mówić, bardziej abstrakcyjnie, o szóstce liczb dodatnich (a, b, c, p, q, r), należałoby jeszcze dołączyć warunek trójkąta dla trójki (a, b, c): wówczas jeśli $L > 0$, to czworościan istnieje, więc automatycznie w każdej z trójek (a, q, r), (b, r, p), (c, p, q) warunek trójkąta jest spełniony. Podsumowując:

Dla liczb $a, b, c, p, q, r > 0$, czworościan o ścianach (a, b, c), (a, q, r), (b, r, p), (c, p, q) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $L > 0$ oraz w co najmniej jednej z tych trójek (równoważnie: we wszystkich) spełniony jest warunek trójkąta.

Całe rozumowanie można też prowadzić inną metodą. Wymaga ona jednak wstępnego założenia, że istnieją *trzy* z czterech wymienionych trójkątów – na przykład trójkąty (a, q, r), (b, r, p), (c, p, q). Gdy miary ich kątów między bokami (q, r), (r, p), (p, q) mają sumę mniejszą od 360° oraz spełniają warunek trójkąta (a to można kontrolować wzorem kosinusów), wówczas da się zaczepić odcinki p, q, r w jednym punkcie przestrzeni i zbudować żądany czworościan. Rzecz jasna, wychodzi znów warunek $L > 0$.

Trygonometryczne wyprowadzenie warunku $L > 0$ znajduje się w pracy:

K. Wirth, A. S. Dreidling, *Edge lengths determining tetrahedrons*, Elemente d. Math. 64 (2009) 160-170.

Wróćmy jeszcze do wzoru (4): $e = |f-x|^2 - p^2$. Gdy czworościan istnieje, twierdzenie Pitagorasa pokazuje, że liczba $-e$ jest kwadratem wysokości h, opuszczonej na płaszczyznę ściany (a, b, c). Ale iloraz we wzorze (7) ma w liczniku i w mianowniku wyrażenia jednakowego stopnia – coś się nie zgadza? To proste – jednorodność została utracona, gdy przyjęliśmy, że trójkąt (a, b, c) jest wpisany w okrąg o promieniu 1. Przyjmując, że ten okrąg ma promień R i prowadząc analogiczne rachunki, doszlibyśmy do równości

$$-e = \frac{R^2}{(abc)^2} \cdot L \ \big(= h^2\big);$$

wymiar już jest, jak trzeba.

Zważywszy, że pole S trójkąta (a, b, c) jest dane wzorem $S = abc/4R$, zaś objętość ostrosłupa wzorem $V = Sh/3$, dochodzimy do konkluzji, że wielkość L we wzorach (7), (8) wyraża, z dokładnością do czynnika, kwadrat objętości rozważanego czworościanu: $L = 144\,V^2$. To analogon wzoru Herona dla pola trójkąta.

Na zakończenie słów parę o ocenianiu prac uczestników olimpiady. Przykład „siatki", która nie jest siatką (nie skleja się w przestrzeni, jak I lub II), był oceniany na zero – trudno inaczej. Przykłady dobrych siatek (jak III i IV, jedynie bez uzasadnienia, że się dadzą skleić) otrzymywały ocenę niezerową – znów: trudno inaczej. Ta niezerowa ocena była jednak daleka od maksymalnej, co wywołało pretensje wielu zawodników: przecież część koncepcyjna została wykonana, zabrakło prostego sprawdzenia. No tak; ale zawodnicy, którzy dali przykłady nieistniejących brył, także wykonali ową pracę koncepcyjną, im też zabrakło jedynie prostego sprawdzenia – tyle, że niewykonalnego. Wszelako autorzy i tych, i tych prac, byli w większości zupełnie nieświadomi problemu realizacji przestrzennej, i jedynie kwestią szczęścia/pecha było znalezienie siatek jak (III,IV)/(I,II). Te prace należało w zasadzie ocenić jednakowo. Na zero? nonsens; na ocenę dodatnią? nonsens. Dedykujemy tę opowiastkę głosicielom opinii, że system punktowy jest świetnym narzędziem, pozwalającym ustalać wyniki konkursów i egzaminów rzetelnie, sprawiedliwie i obiektywnie.