# O tym, co się da, a czego nie da się rozwiązać

*Maciej BRYŃSKI* Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Rozwiąż równanie! – to jedno z najczęściej słyszanych przez ucznia poleceń nauczyciela matematyki. Gdy usłyszymy to polecenie, nie wątpimy, że otrzymane równanie można rozwiązać i że my potrafimy to zrobić. Zresztą o każdym zadaniu matematycznym, na które natrafimy, uważamy, że można je rozwiązać. Jeśli nie widzimy rozwiązania od razu, to pewnie trzeba jeszcze trochę pomyśleć, pokombinować, wynaleźć jakiś sprytny sposób, może poczytać w mądrych książkach i rozwiązanie musi się znaleźć. Czy na pewno tak jest? Okazuje się, że istnieją zadania, niedające się rozwiązać, choć są łudząco podobne do innych, które rozwiązujemy bez trudu.

Weźmy pod uwagę równanie

$$(*) \qquad x^5 - 6x + 2 = 0.$$

Wygląda całkiem niewinnie. Szkolny sposób na takie równania podpowiada: sprawdź, czy któryś spośród dzielników wyrazu wolnego nie jest rozwiązaniem, bo tylko takie liczby mogą być rozwiązaniami wymiernymi równania. Tymi dzielnikami są liczby $-2, -1, 1, 2$. Oznaczamy $f(x) = x^5 - 6x + 2$ i obliczamy

$$f(-2) = -32 + 12 + 2 = -18, \qquad f(1) = 1 - 6 + 2 = -3,$$
$$f(-1) = -1 + 6 + 2 = 7, \qquad f(2) = 32 - 12 + 2 = 22.$$

Możemy stwierdzić, że żadna liczba wymierna nie jest rozwiązaniem równania $(*)$. Jednocześnie widzimy, że nasze równanie ma co najmniej trzy rozwiązania rzeczywiste leżące odpowiednio w przedziałach $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, 2)$, gdyż funkcja $f$ jest ciągła i na końcach każdego z przedziałów przyjmuje wartości przeciwnych znaków, więc wewnątrz przedziału ma miejsce zerowe. Badając przebieg zmienności funkcji $f$, można stwierdzić, że nie ma ona więcej miejsc zerowych. Oznacza to, że równanie $(*)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste i dwa zespolone. Te informacje pozwalają stwierdzić, że równania tego nie można rozwiązać „przez pierwiastniki", tj. nie można wyrazić jego pierwiastków przez wzory, w których na liczbach wymiernych byłyby wykonywane operacje wyciągania pierwiastków dowolnych stopni oraz działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, wielokrotnie iterowane. Niestety, dowód tego faktu nie zmieściłby się na stronach tego numeru *Delty*; można go znaleźć w literaturze (np. Jerzy Browkin, *Wybrane zagadnienia algebry*, czy Maciej Bryński, *Elementy teorii Galois*). Wiemy z nauki szkolnej, że pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ wyrażają się przez pierwiastniki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Istnieją też wzory pozwalające wyrazić przez pierwiastniki pierwiastki dowolnego równania stopnia trzeciego, a także czwartego. Wzory te są jednak na tyle skomplikowane, że niezbyt nadają się do praktycznego stosowania. Niestety, dla równań wyższych stopni wzory takie nie istnieją, co ilustruje przykład równania $(*)$.

Nie znaczy to jednak, że żadnego równania stopnia piątego lub wyższego nie potrafimy rozwiązać.

**Przykład 1.** Rozwiążemy równanie

$$(**) \qquad 2x^5 - 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 11x + 2 = 0.$$

Zauważmy, że równanie to ma pierwiastek $x_1 = -1$. Istotnie

$$2 \cdot (-1)^5 - 11 \cdot (-1)^4 + 11 \cdot (-1)^3 + 11 \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) + 2$$
$$= -2 - 11 - 11 + 11 + 11 + 2 = 0.$$

Dzielimy wielomian $2x^5 - 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 11x + 2$ przez $x + 1$ i dostajemy wielomian $2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$. Aby rozwiązać równanie $2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0$, podzielimy obie strony przez $x^2$ (możemy to zrobić bezkarnie, gdyż 0 nie jest pierwiastkiem tego równania) i do otrzymanego równania $2x^2 - 13x + 24 - 13 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$ zastosujemy podstawienie $t = x + \frac{1}{x}$. Ponieważ $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, więc równanie przyjmuje postać $2t^2 - 13t + 20 = 0$. Rozwiązujemy: $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 169 - 160 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$, $t_1 = \frac{13-3}{4} = 2\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{13+3}{4} = 4$. Dostajemy stąd dwa równania $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ i $x + \frac{1}{x} = 4$, które przekształcamy do postaci równoważnych $2x^2 - 5x + 2 = 0$ i $x^2 - 4x + 1 = 0$. Rozwiązujemy je kolejno: $\Delta = 25 - 16 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$, $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$; $\Delta = 16 - 4 = 12$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$, $x_4 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$, $x_5 = 2 + \sqrt{3}$. Ostatecznie więc pierwiastkami równania $(**)$ są liczby $-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Do nierozwiązalności równań algebraicznych przez pierwiastniki podobna jest sytuacja z niewykonalnością pewnych konstrukcji geometrycznych. Klasyczna konstrukcja geometryczna na płaszczyźnie, gdy dany jest pewien zbiór punktów, polega na wielokrotnym iterowaniu następujących czynności:

- przez dwa punkty z tego zbioru możemy poprowadzić prostą,
- możemy wykreślić okrąg, którego środkiem jest punkt dany, a promień jest równy odległości dwóch danych punktów,
- punkty przecięcia takich prostych i okręgów dodajemy do zbioru danych.

Zauważmy, że punkt przecięcia dwóch prostych ma współrzędne będące rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych (mianowicie równań tych prostych). Wynika stąd, że współrzędne tego punktu należą do tego samego ciała liczbowego, z którego pochodzą współczynniki równań, a zatem do tego ciała liczbowego, do którego należą współrzędne punktów wyznaczających rozważane proste.

Ciało liczbowe to zbiór liczb zawierający wszystkie liczby wymierne i mający tę własność, że wynik dodawania, odejmowania lub dzielenia liczb z tego zbioru również do niego należy (oczywiście, przez 0 nie dzielimy).

Inaczej jest w przypadku punktu przecięcia prostej i okręgu albo punktu przecięcia dwóch okręgów. Równanie prostej jest równaniem liniowym postaci $ax + by = c$, równanie okręgu – równaniem kwadratowym $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Wyznaczając jedną z niewiadomych $x$ lub $y$ z pierwszego równania i podstawiając do drugiego, otrzymamy równanie kwadratowe, którego współczynniki należą do ciała liczbowego, z którego pochodzą współczynniki rozważanych równań prostej i okręgu. Pierwiastki równania kwadratowego mogą nie należeć do ciała liczbowego, z którego pochodzą współczynniki tego równania, gdyż do ich obliczenia trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wyróżnika $\Delta$. Na przykład, równanie $x^2 + x - 1 = 0$ ma współczynniki wymierne, ale $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, a więc pierwiastki należą do ciała liczbowego $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, zawierającego liczby postaci $m + n\sqrt{5}$, gdzie $m, n$ są liczbami wymiernymi.

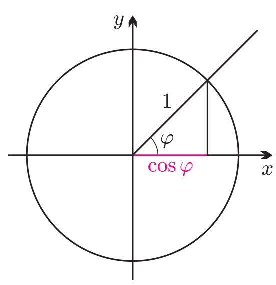
Podobnie w przypadku punktów przecięcia dwóch okręgów. Układ równań dwóch okręgów $(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2$ i $(x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = r_2^2$ jest równoważny układowi powstałemu przez pozostawienie jednego z danych równań i zastąpienie drugiego przez ich różnicę. Różnica równań dwóch przecinających się okręgów jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty przecięcia tych okręgów. Sprowadziliśmy w ten sposób wyznaczanie punktów przecięcia dwóch okręgów do przypadku wyznaczania punktów przecięcia okręgu i prostej. Tu więc również współrzędne tych punktów należą albo do ciała liczbowego zawierającego współczynniki równań, albo do rozszerzenia tego ciała o pierwiastek kwadratowy z pewnego elementu tego ciała.

Biorąc pod uwagę te obserwacje, możemy stwierdzić, że jeśli $K$ jest ciałem liczbowym, do którego należą współrzędne wszystkich punktów danych do wykonania pewnej konstrukcji, i możemy skonstruować punkt $P = (x, y)$, to liczby $x, y$ należą do pewnego ciała, które powstaje przez rozszerzenie ciała $K$ w wyniku skończonej liczby dołączania pierwiastków kwadratowych (mówimy, że liczby $x, y$ wyrażają się przez pierwiastniki kwadratowe). Na tej podstawie możemy wywnioskować, że pewnych konstrukcji nie można wykonać cyrklem i linijką.

Należy tu wymienić trzy zadania wywodzące się ze starożytności: trysekcja kąta, podwojenie sześcianu, kwadratura koła. Zajmijmy się bliżej pierwszym z tych zadań.

**Przykład 2.** Zadanie trysekcji kąta: dany kąt podzielić konstrukcyjnie na trzy równe części. (Pytanie o wykonalność tej konstrukcji jest naturalne, bo podział kąta na dwie lub cztery równe części jest jedną z najprostszych konstrukcji: należy podzielić kąt jego dwusieczną i ewentualnie dwusieczną połowy danego kąta.)

Mając dany kąt, możemy skonstruować jego kosinus. Umieśćmy w tym celu dany kąt $\varphi$ w układzie współrzędnych w ten sposób, by jedno ramię pokrywało się z dodatnią półosią osi $OX$, i wykreślmy okrąg o środku w początku układu i promieniu 1, a następnie zrzutujmy punkt przecięcia drugiego ramienia kąta z okręgiem na oś $OX$.




Współrzędna $x$ tego rzutu jest kosinusem kąta $\varphi$. Podobnie mając daną liczbę $x \in (-1, 1)$, możemy skonstruować kąt, którego kosinus jest równy $x$. Wystarczy z punktu $x$, leżącego na osi $OX$, wystawić prostopadłą do tej osi i przez punkt przecięcia tej prostej z okręgiem jednostkowym poprowadzić półprostą o początku w punkcie $(0, 0)$. Ta półprosta wraz z dodatnią półosią osi $OX$ wyznacza kąt $\varphi$. Wobec tego pytanie o wykonalność trysekcji kąta $\varphi$ jest równoważne pytaniu o konstruowalność liczby $\cos\frac{\varphi}{3}$. Ze znanych wzorów trygonometrycznych mamy

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

więc $\cos\frac{\varphi}{3} = x$ spełnia zależność

$$\cos\varphi = 4x^3 - 3x,$$

jest więc pierwiastkiem wielomianu

$$w = 4x^3 - 3x - \cos\varphi,$$

którego współczynniki należą do ciała liczbowego zawierającego liczby wymierne i liczbę $\cos\varphi$.

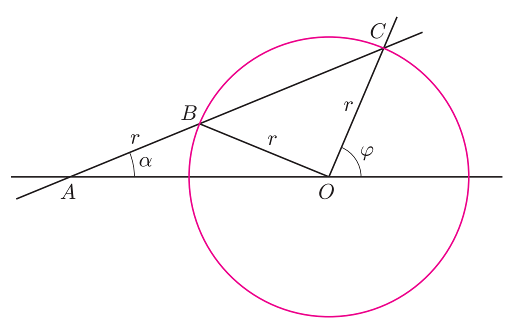
Jeśli wielomian $w$ jest nierozkładalny nad tym ciałem, to ponieważ jest stopnia trzeciego, więc jego pierwiastków nie można wyrazić przez pierwiastniki kwadratowe. To oznacza niewykonalność trysekcji.

Najprostszym przykładem kąta, którego trysekcja jest niewykonalna, jest kąt $60°$. Istotnie, $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Wielomian $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ ma współczynniki z ciała liczb wymiernych i jest nierozkładalny nad tym ciałem. Gdyby bowiem był rozkładalny, to również wielomian $8x^3 - 6x - 1$ byłby rozkładalny, jeden z czynników tego rozkładu byłby stopnia pierwszego, skąd wynikałoby, że wielomian miałby pierwiastek wymierny. Pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogłyby być liczby $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$, a jak można bezpośrednio sprawdzić, żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Inaczej jest z kątem $90°$. Ponieważ $\cos 90° = 0$, więc wielomian $4x^3 - 3x - \cos\varphi = 4x^3 - 3x = x(4x^2 - 3)$ jest rozkładalny. Zatem trysekcję kąta $90°$ można przeprowadzić, choć zamiast konstrukcji podziału tego kąta na trzy równe części możemy podać bezpośrednią konstrukcję kąta $30°$: konstruujemy trójkąt równoboczny i prowadzimy dwusieczną jego kąta wewnętrznego.

Niewykonalność trysekcji kąta oznacza tyle: nie można za pomocą cyrkla i linijki podzielić dowolnego kąta na trzy równe części. Powtórzmy: w konstrukcji klasycznej linijki wolno używać jedynie do kreślenia prostej przez dane dwa punkty, cyrkla – do kreślenia okręgu o środku w danym punkcie i promieniu równym odległości dwóch danych punktów.

Okazuje się, że nieznacznie wzbogacając możliwości wykorzystania cyrkla i linijki, można wykonać konstrukcje niewykonalne w sensie klasycznym. Archimedes zaproponował wykonanie trysekcji dowolnego kąta za pomocą cyrkla i linijki, na której zaznaczono dwa punkty. Robi się to tak. Mając dany dowolny kąt $\varphi$ o wierzchołku $O$, przedłużmy jedno z jego ramion do prostej i wykreślmy okrąg o środku $O$ i promieniu równym odległości $r$ punktów zaznaczonych na linijce. Następnie przyłóżmy linijkę tak, by przeszła przez punkt $C$ przecięcia okręgu z drugim ramieniem kąta, a z dwóch zaznaczonych na linijce punktów punkt $A$ wypadł na przedłużeniu pierwszego ramienia, zaś punkt $B$ był różnym od $C$ punktem okręgu.




Prosta przechodząca przez punkty $A, B, C$ tworzy z przedłużeniem pierwszego ramienia kąt $\alpha$. Wykażemy, że $\alpha = \varphi/3$. Trójkąt $ABO$ jest równoramienny, bo $AB = BO = r$, skąd wynika, że $\sphericalangle ABO = 180° - 2\alpha$, a więc $\sphericalangle OBC = 2\alpha$. Trójkąt $BCO$ również jest równoramienny, bo $BO = CO = r$, stąd $\sphericalangle BCO = 2\alpha$. Wobec tego $\sphericalangle BOC = 180° - 4\alpha$. Trzy kąty o wierzchołku $O$ dają w sumie kąt półpełny, a zatem

$$\alpha + (180° - 4\alpha) + \varphi = 180°,$$

skąd wynika, że $\varphi = 3\alpha$.