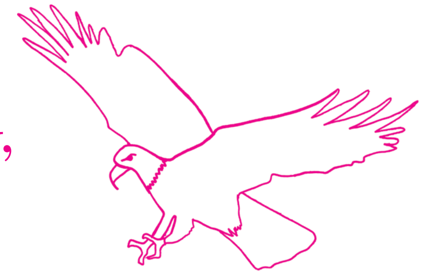


O polowaniu na pchłę i czekaniu na dwa orły, czyli trochę o łańcuchach Markowa

Katarzyna PIETRUSKA-PAŁUBA[*]

Zacznijmy od prostego przykładu. Pchła skacze między ziemią, kotem i człowiekiem. Za każdym razem wybiera miejsce docelowe z takim samym prawdopodobieństwem (równym $\frac{1}{2}$). Mogłaby tak skakać w nieskończoność, gdyby nie to, że po wskoczeniu na człowieka ginie. Ile średnio skoków pchła wykona przed śmiercią, jeżeli zaczyna na ziemi?

Zadanie rozwiążemy bez trudu, pamiętając, że średnia wartość zmiennej losowej to suma wszystkich iloczynów postaci

(liczba skoków) · (prawdopodobieństwo tej liczby).

Po prostu wypiszemy wszystkie możliwe drogi pchły: zginie ona po 1 skoku, jeżeli od razu skoczy na człowieka, co zapisujemy C; po 2 skokach – KC (najpierw na kota, potem na człowieka), po 3 skokach – KZC, po 4 skokach – $KZKC$, i tak dalej. Każdy taki ciąg długości r ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{2^r}$, $r = 1, 2, \ldots$, a zatem średnio pchła wykona $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r}$ skoków. Oznaczając $s = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} = 2$, średnią ilość skoków pchły możemy wyznaczyć, sumując poniższe wyrażenie kolumnami:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r} = \quad & \frac{1}{2} + \\
& + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \\
& + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \\
& + \quad \ldots \quad = \\
\hline
= \quad & \frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \ldots = \\
= \; & \frac{s}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 2.
\end{aligned}$$

A zatem pchła wykona średnio 2 skoki.

Rozbudujmy ten przykład i wpuśćmy do pokoju psa. Zasady skoków pchły pozostają takie same, ale teraz prawdopodobieństwo wyboru każdego docelowego miejsca skoku to $\frac{1}{3}$. Możemy rozwiązywać zadanie tak samo jak przedtem – będzie to nieco dłuższe, ale nadal wykonalne.

Można też nieco inaczej. W obu powyższych zagadnieniach miejsce kolejnego przeskoku zależy tylko od tego, gdzie pchła znajduje się w danej chwili, a nie od jej przeszłej podróży. Ponadto z góry wiadomo, jakie są możliwe położenia pchły, tak zwane *stany* – $\{Z, K, C\}$ lub $\{Z, K, P, C\}$, oraz jakie są reguły poruszania się między stanami. Oznacza to, że w obu przypadkach mamy do czynienia z *łańcuchem Markowa*. Reguły przeskoku to *prawdopodobieństwa przejścia* między stanami. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j oznaczamy przez p_{ij}.

W zagadnieniu I mamy:

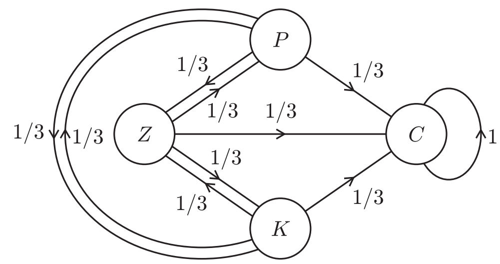
$$p_{ZC} = p_{ZK} = p_{KZ} = p_{KC} = \tfrac{1}{2},$$

dla kompletności przyjmiemy jeszcze $p_{CC} = 1$.
W zagadnieniu II jest podobnie:

$$\begin{aligned}
p_{ZC} = p_{ZK} = p_{ZP} = p_{KZ} = p_{KP} = p_{KC} = \\
= p_{PZ} = p_{PK} = p_{PC} = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

oraz $p_{CC} = 1$. Wygodnie jest zapisać takie prawdopodobieństwa w macierzy albo wyrysować je jako graf. Na przykład dla właściciela dwóch zwierząt macierz oraz graf będą wyglądać następująco:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



W ogólnej sytuacji powiemy, że ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \ldots$ tworzy jednorodny łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{E_1, \ldots, E_N\}$, jeżeli dla dowolnego $n = 0, 1, 2, \ldots$ i dowolnego ciągu stanów $E_{i_0}, \ldots, E_{i_n}, E_{i_{n+1}}$ mamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = E_{i_{n+1}} | X_n = E_{i_n}) = \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{n+1} = E_{i_{n+1}} | X_n = E_{i_n}, \ldots, X_0 = E_{i_0}).
\end{aligned}$$

Oznacza to, że dochodząc do każdego stanu, łańcuch „zapomina”, skąd przyszedł, a prawdopodobieństwa przejścia w następnym ruchu zależą tylko od położenia bieżącego. Własność tę nazywamy *własnością Markowa* i tak właśnie jest w powyższych przykładach.

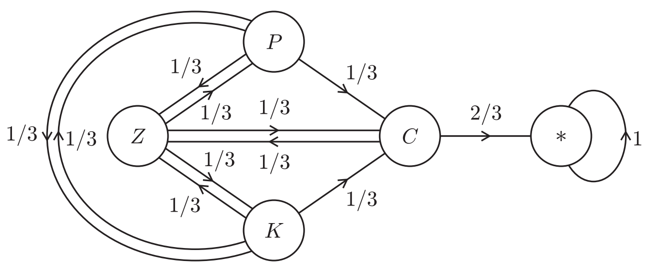
Teraz rozwiążemy zadanie o średnim czasie życia pchły dla łańcucha Markowa o grafie jak wyżej. Niech t_Z, t_K, t_P, t_C oznaczają średnie czasy życia pchły startującej odpowiednio z ziemi, kota, psa, człowieka. Oczywiście, mamy $t_C = 0$, a pozostałe czasy życia możemy związać układem równań, wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo całkowite i własność Markowa. Na przykład, jeżeli startujemy z ziemi, to po wykonaniu jednego skoku przechodzimy do jednego ze stanów K, P, C z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ i kontynuujemy skoki z tych nowych stanów, zapominając o przeszłości, ale za to zwiększając „odczyt licznika” o 1, bo jeden skok już wykonaliśmy. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases}
t_Z = 1 + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\
t_K = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\
t_P = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_C.
\end{cases}$$

[*]Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Rozwiązując go, natychmiast dostaniemy, że $t_Z = t_K = t_P = 3$.

A jeśli człowiek ma gorszy refleks i szansa na to, że zabije pchłę, która na niego wskoczyła, wynosi $\frac{2}{3}$? Jeżeli pchła przeżyje kontakt z człowiekiem, to przerażona (czy pchła się boi?) nie zastanawia się już, co ma zrobić (czy pchła się zastanawia?) i zeskakuje na ziemię. Dla opisania ruchu pchły dodamy osobny stan $*$ (po angielsku nazywany *cemetery state*), do którego można dojść tylko z C i z którego nie można już wyjść. Graf będzie teraz taki.



Uważny Czytelnik zauważy, że powyższy graf nie do końca odpowiada omawianej sytuacji. Graf ten uwzględnia dodatkowy krok między wskoczeniem na człowieka a śmiercią pchły, którego w rzeczywistości nie dodaje się do czasu jej życia.

Postępując jak wcześniej, wypiszemy układ równań na czasy dojścia do $*$, odpowiadający grafowi 2:

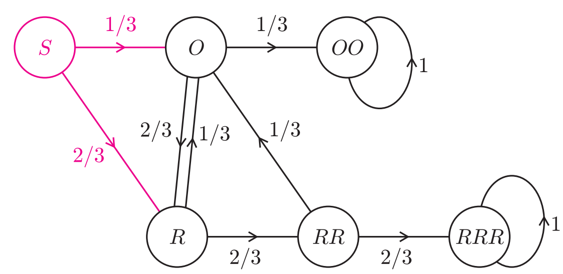
$$\begin{cases} t_Z = 1 + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\ t_K = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_P + \frac{1}{3}t_C, \\ t_P = 1 + \frac{1}{3}t_Z + \frac{1}{3}t_K + \frac{1}{3}t_C, \\ t_C = 1 + \frac{2}{3}t_* + \frac{1}{3}t_Z. \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że teraz zamiast $t_C = 0$ będziemy mieli $t_* = 0$. Rozwiązując ten układ, dostaniemy $t_Z = t_K = t_P = 6$; $t_C = 3$. Liczba t_Z nie jest jednak średnim czasem życia pchły – czas życia będzie o 1 mniejszy, bo przecież dodaliśmy jeden krok na przejście $C \to *$. Zatem pchła średnio wykona 5 skoków, zanim zginie.

Rozważymy teraz pozornie zupełnie inne zagadnienie. Adaś i Bolek obserwują wyniki kolejnych rzutów niesymetryczną monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła to $\frac{1}{3}$. Założyli się o czekoladę: Adaś wygra, jeżeli dwa orły pod rząd wypadną, zanim Bolek doczeka się serii trzech reszek, a Bolek – jeśli to trzy reszki pojawią się wcześniej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wygra Adaś?

Czy wiesz, Czytelniku, czemu ta gra z prawdopodobieństwem 1 zakończy się po skończonej liczbie rzutów?

Zastanówmy się, gdzie można w tym zagadnieniu dopatrzeć się łańcucha Markowa. Otóż będziemy rozważali tylko takie końcówki ciągów, które mogą być kontynuowane jako rozstrzygające grę OO albo RRR. Na przykład, jeżeli wykonano 5 rzutów, w których po kolei wypadło $RRORO$, to układ będzie w stanie O, bo O jest początkiem pożądanego ciągu OO. Gdyby natomiast wynikiem było $RORRR$, to układ byłby w stanie RRR – byłaby to wygrana Bolka i koniec zabawy. Możliwe stany układu są więc następujące: O, R, RR, OO, RRR, a prawdopodobieństwa przejścia to $p_{O,OO} = \frac{1}{3}$, $p_{O,R} = \frac{2}{3}$, $p_{R,O} = \frac{1}{3}$, $p_{R,RR} = \frac{2}{3}$, $p_{RR,O} = \frac{1}{3}$, $p_{RR,RRR} = \frac{2}{3}$, $p_{OO,OO} = 1$, $p_{RRR,RRR} = 1$. Musimy jeszcze dopowiedzieć, że po pierwszym rzucie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ wchodzimy w stan O, a z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ – w stan R, i to określa pierwszy krok. Adaś wygra, jeżeli uda się dojść do stanu OO. Graf układu wygląda następująco.



Analogicznie jak w zadaniu o średnim czasie życia pchły, możemy ułożyć układ równań, w którym powiążemy prawdopodobieństwa wygranej Adasia przy starcie ze stanów O, R, RR, OO, RRR, oznaczone odpowiednio przez $x_O, x_R, x_{RR}, x_{OO}, x_{RRR}$. Wykonujemy krok w przód, patrzymy, gdzie dotarliśmy, korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, a następnie z własności Markowa (tj. zapominamy, skąd przyszliśmy), i rozważamy prawdopodobieństwa wygranej Adasia przy starcie z nowych położeń. Na przykład, ze stanu O przechodzimy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ do stanu OO i z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ do stanu R. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_O = \frac{1}{3}x_{OO} + \frac{2}{3}x_R, \\ x_R = \frac{1}{3}x_O + \frac{2}{3}x_{RR}, \\ x_{RR} = \frac{1}{3}x_O + \frac{2}{3}x_{RRR}, \end{cases}$$

przy czym mamy $x_{OO} = 1$ i $x_{RRR} = 0$. Rozwiązaniem układu są liczby:

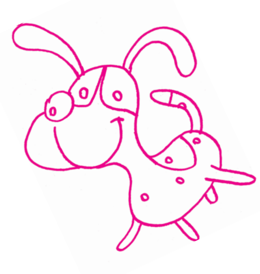
$$x_O = \frac{9}{17}, \quad x_R = \frac{5}{17}, \quad x_{RR} = \frac{3}{17}.$$

Ponieważ po pierwszym kroku znajdziemy się w stanie O lub R (z prawdopodobieństwem odpowiednio $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$), to prawdopodobieństwo wygranej Adasia wynosi

$$p = \frac{1}{3}x_O + \frac{2}{3}x_R = \frac{19}{51}.$$

Może Adaś nie lubi czekolady?

Pozostawiamy Czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania zadanie: jeżeli moneta jest symetryczna, to jaki będzie średni czas trwania gry? Odpowiedź w numerze.



Rozwiązanie zadania F 840.
Sfera pochłania wszystkie emitowane przez lampę fotony. Tempo emisji fotonów jest równe stosunkowi mocy lampy P_E do energii E emitowanego fotonu. Ponieważ $E = h\nu$, więc $n = n_e = P_E/h\nu$, gdzie h jest stałą Plancka, a ν częstością emitowanego światła. Podstawiając $\nu = c/\lambda$, gdzie c jest prędkością światła, a λ długością jego fali, otrzymujemy ostatecznie $n = P_E \cdot \lambda/hc$, co dla wielkości danych w zadaniu daje $2{,}97 \cdot 10^{20}$ fotonów na sekundę.