Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2013

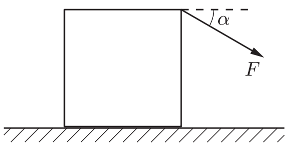
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

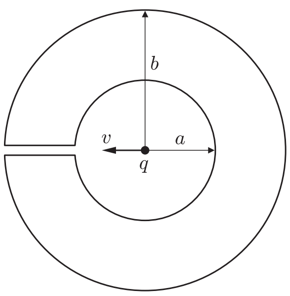
Zadania z fizyki nr 562, 563

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

562. Sześcian o masie m stoi na powierzchni poziomej. Z jaką minimalną siłą F i pod jakim kątem α do poziomu (rys. 1) należy ciągnąć sześcian za środek górnej krawędzi, żeby przewrócił się bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia wynosi μ? Siła F jest prostopadła do górnej krawędzi sześcianu.

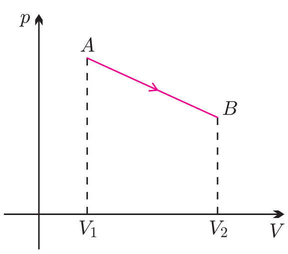


Rys. 2

563. W środku nieruchomej, wydrążonej, przewodzącej kuli o promieniach wewnętrznym a i zewnętrznym b umieszczono cząstkę o masie m naładowaną ładunkiem $q > 0$ (rys. 2). Jaką prędkość należy nadać cząstce, aby przez wąską szczelinę oddaliła się do nieskończoności? Przenikalność elektryczna próżni ε_0 jest dana.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2013

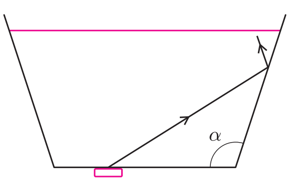
Przypominamy treść zadań:



Rys. 3

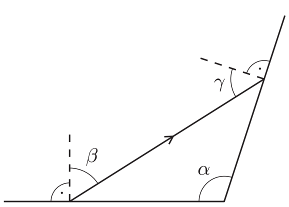
558. Jednoatomowy gaz doskonały poddano przemianie przedstawionej na wykresie pV (rys. 3). Końce odcinka AB leżą na tej samej izotermie, a odpowiadające im objętości wynoszą V_1 i V_2. Jaka jest część odcinka AB, dla której gaz pobiera ciepło w tej przemianie?

559. Cienkie szklane naczynie ma w przekroju kształt trapezu, a jego dno ma kształt prostokąta (rys. 4). Do naczynia nalano wody o współczynniku załamania $n = 1{,}33$. Jaką wartość musi mieć kąt α między podstawą a ścianką naczynia, aby przez boczną ściankę nie było widać monety umieszczonej pod dnem naczynia?



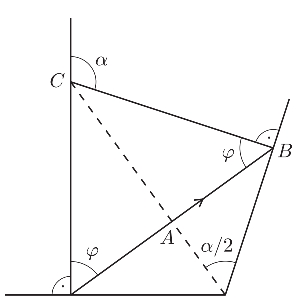
Rys. 4

558. Ciśnienie w przemianie AB zmienia się liniowo zgodnie ze wzorem $p = p_0 - \alpha V$. Oznaczając przez T temperaturę w punktach A i B, otrzymujemy, korzystając z równania Clapeyrona $p_0 = nRT(V_1+V_2)/(V_1V_2)$, $\alpha = nRT/(V_1V_2)$, gdzie n oznacza liczbę moli gazu, a R jest stałą gazową. Rozważmy badaną przemianę w małym przedziale objętości ΔV. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki ciepło tam przekazane wynosi $\Delta Q = \Delta U + p\Delta V$. Zmiana energii wewnętrznej dana jest wzorem $\Delta U = nc_V\Delta T$, gdzie molowe ciepło właściwe c_V przy stałej objętości dla gazu jednoatomowego wynosi $3R/2$. Zmiana temperatury w badanym przedziale wynosi $\Delta T = (p_0 - 2\alpha V)\Delta V/(nR)$, gdzie pominęliśmy wyraz proporcjonalny do $(\Delta V)^2$. Gaz pobiera ciepło, gdy $\Delta Q = \left(\frac{5}{2}p_0 - 4\alpha V\right)\Delta V > 0$, czyli gdy $V < 5p_0/(8\alpha)$. Zatem ciepło w przemianie AB pobierane jest na odcinku AD, gdzie objętość, odpowiadająca punktowi D, wynosi $V_D = 5(V_1+V_2)/8$.



Rys. 5

559. Niech β będzie kątem załamania promienia przechodzącego z warstwy powietrza między monetą a dnem naczynia do wody (rys. 5). Dno naczynia powoduje tylko niewielkie, równoległe przesunięcie promienia padającego, co nie wpływa na wynik obserwacji. Ponieważ promień przeszedł z powietrza do wody, wartość β nie przekracza wartości kąta granicznego φ: $\sin\beta \leqslant \sin\varphi = 1/n$. Promień padający na boczną ściankę naczynia pod kątem γ nie wyjdzie na zewnątrz, gdy $\gamma \geqslant \varphi$. Zmniejszenie kąta β powoduje zwiększenie kąta γ, wystarczy więc rozważyć przypadek graniczny, gdy $\beta = \gamma$. Rozważmy sytuację, gdy oba kąty β i γ mają wartość graniczną. W trójkącie ABC na rysunku 6 mamy wtedy $\varphi = \alpha/2$. Zatem nie zobaczymy monety przez boczną ściankę, gdy $\sin(\alpha/2) \geqslant 1/n = 0{,}752$, czyli $\alpha \geqslant 97°30'$.



Rys. 6

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 655 ($WT = 2{,}33$) i 656 ($WT = 1{,}39$) z numeru 2/2013

Zbigniew Skalik	Wrocław	47,37
Witold Bednarek	Łódź	44,73
Paweł Łabędzki	Kielce	42,05
Krzysztof Kamiński	Pabianice	41,63
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Jerzy Cisło	Wrocław	41,06
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Marek Spychała	Warszawa	36,50
Paweł Najman	Kraków	36,37

Pan Zbigniew Skalik zalicza już drugą rundę. Zaś najwytrwalszy uczestnik Ligi – Witold Bednarek – także drugą, ale weterańską; to znaczy, „44" po raz szósty!

Zadania z matematyki nr 665, 666

Redaguje Marcin E. KUCZMA

665. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i DC, odcinki BP i DQ mają jednakową długość. Dowieść, że odcinki BQ i DP przecinają się w punkcie, leżącym na dwusiecznej kąta BAD.

666. Niech W będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 2$, o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wartość $W(n)$ jest k-tą potęgą liczby całkowitej nieujemnej. Udowodnić, że W ma postać $W(x) = (ax+b)^k$, gdzie $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ są liczbami całkowitymi.

Zadanie 666 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2013

Przypominamy treść zadań:

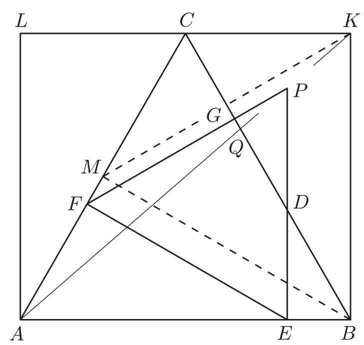
661. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt D na boku BC. Punkty E, F, G, leżące odpowiednio na bokach AB, CA, BC, są wyznaczone przez warunki $DE \perp AB$, $EF \perp CA$, $FG \perp BC$. Proste DE i FG przecinają się w punkcie P. W jakim stosunku prosta AP dzieli odcinek BC?

662. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(2 - nx_n)}{\ln n}$.

661. Zbudujmy prostokąt $ABKL$ tak, by punkt C był środkiem odcinka KL. Niech M będzie środkiem boku CA. Każdy z trójkątów EPF, BKM ma boki prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta ABC (rysunek); są to więc trójkąty o bokach odpowiednio równoległych – zatem jednokładne. Środkiem jednokładności jest punkt A (współliniowy z B, E oraz z M, F). Punktowi P odpowiada w tej jednokładności punkt K. To znaczy, że prosta AP przechodzi przez K (niezależnie od wyboru początkowego punktu D) i przecina odcinek BC w takim punkcie Q, że trójkąty QAB i QKC są podobne. Stąd wynik: $|BQ| : |CQ| = |AB| : |CK| = 2$.



662. Jak w rozwiązaniu zadania 654, tak i teraz użyjemy *wzoru Stolza*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

dla każdego ciągu (b_n), rosnącego do nieskończoności, i dla każdego ciągu (a_n), dla którego granica po prawej stronie istnieje.

Dany w zadaniu iloraz piszemy w postaci

$$q_n = \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n} = nx_n \cdot \frac{2x_n^{-1} - n}{\ln n}. \tag{1}$$

Zgodnie z wynikiem zadania 654, $nx_n \to 2$; pozostaje zająć się drugim czynnikiem. We wzorze Stolza przyjmijmy $a_n = 2x_n^{-1} - n$, $b_n = \ln n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^{-1} - n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) - 1}{\ln(n+1) - \ln n}, \tag{2}$$

jeśli tylko ta ostatnia granica istnieje.

W rozwiązaniu zadania 654 zostało użyte przekształcenie

$$x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} = x_n^{-2}(e^{x_n} - 1 - x_n)$$

oraz fragment rozwinięcia potęgowego

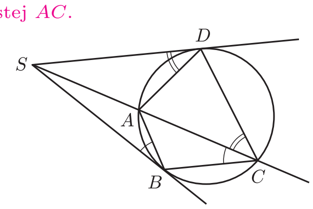
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad (\text{przy } x \to 0).$$

Zatem

$$\frac{2(x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}) - 1}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{2x_n^{-2}(e^{x_n} - 1 - x_n) - 1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} =$$
$$= \frac{e^{x_n} - 1 - x_n - \frac{1}{2}x_n^2}{x_n^3} \cdot \frac{2nx_n}{n\ln(1 + \frac{1}{n})}.$$

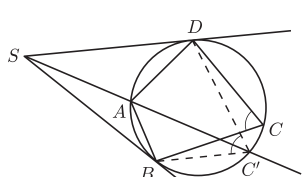
W tym ostatnim iloczynie pierwszy czynnik dąży do 1/6 (nieco dłuższy fragment rozwinięcia $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$). Drugi czynnik: licznik dąży do 4, mianownik do 1. Cały iloczyn dąży do 2/3. Tyle więc wynosi granica napisana po lewej stronie równości (2). Wracamy do równości (1), pamiętając, że $nx_n \to 2$, i otrzymujemy ostatecznie $\lim q_n = 4/3$.

Rozwiązanie zadania M 1396.
Załóżmy najpierw, że S leży na prostej AC.



Jak wiadomo, kąt między styczną a cięciwą jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, więc $\sphericalangle SBA = \sphericalangle BCA$. Zatem trójkąty BSA i CSB są podobne, więc $AB/BC = AS/BS$. Podobnie stwierdzimy, że $AD/CD = AS/DS$, ale $BS = DS$, więc $AB/BC = AD/CD$.

Załóżmy teraz, że zachodzi $AB/BC = AD/CD$, ale S nie leży na AC (powiedzmy, że punkt A leży bliżej punktu S niż punkt C).



Niech SA przecina okrąg w punkcie C'. Z poprzedniej części zadania wiadomo, że $AB/BC' = AD/C'D$, więc $BC/CD = BC'/C'D$, co wraz z równością kątów BCD i $BC'D$ implikuje, że trójkąty BCD i $BC'D$ są podobne, a że mają wspólny bok, to są przystające. Zatem $C = C'$.