Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

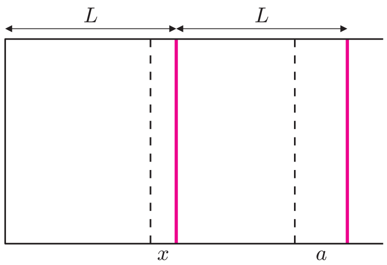
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2013

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

556. W poziomym cylindrze, w odległościach L i $2L$ na prawo od zamkniętego końca znajdują się dwa tłoki (rys. 1), które mogą przemieszczać się bez tarcia (grubości tłoków pomijamy). W lewej części znajduje się para wodna pod ciśnieniem p_0, w prawej powietrze o takim samym ciśnieniu. Ciśnienie pary nasyconej wody w danej temperaturze wynosi $2p_0$. Prawy tłok został wolno wepchnięty na odległość a. O ile przesunął się lewy tłok? Temperatura jest stała.

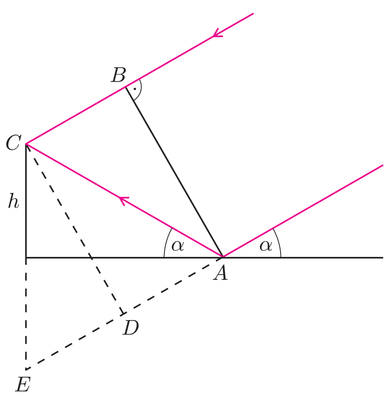
557. Detektor fal radiowych znajduje się na brzegu jeziora na wysokości h nad poziomem wody. Rejestruje on sygnały wysyłane przez satelitę wznoszącego się nad horyzontem. Przy jakich kątach wzniesienia satelity nad horyzontem obserwuje się maksima sygnału? Długość fali emitowanej przez satelitę wynosi λ. Przyjmujemy, że powierzchnia jeziora jest idealnie gładka.



Rys. 1

556. Rozważmy proces do chwili, gdy para wodna osiągnie stan nasycenia. Traktując oba gazy jako doskonałe, możemy dla każdego z nich napisać prawo przemiany izotermicznej: $p_0L = p_1(L-a+x) = p_1(L-x)$, gdzie x jest przesunięciem tłoka lewego, zatem $x = a/2$. Ciśnienie p_1 nie przekracza ciśnienia pary nasyconej: $p_0L \leqslant 2p_0(L-a/2)$, stąd $a \leqslant L$, $x \leqslant L/2$.

Gdy $a > L$, para wodna w lewej komorze zaczyna się skraplać, ciśnienie ma stałą wartość $p = 2p_0$, a objętości gazów w obu częściach są takie same (zaniedbujemy objętość wody powstałej w wyniku skroplenia w porównaniu z objętością pary nasyconej o tej samej masie). Oznaczając dodatkowe przesunięcia obu tłoków przez Δx, możemy napisać: $\Delta x = a - L = x - L/2$, stąd $x = a - L/2$. Ostatecznie: $x = a/2$ dla $a \leqslant L$, $x = a - L/2$ dla $L < a \leqslant 3L/2$, $x = L$ dla $3L/2 < a \leqslant 2L$.



Rys. 2

557. Ponieważ odległość satelity od detektora jest dużo większa niż h, możemy przyjąć, że wiązka promieniowania wysyłanego przez satelitę jest równoległa. Do odbiornika w punkcie C docierają promienie biegnące bezpośrednio od satelity i odbite od powierzchni jeziora, jak na rysunku 2. Punkty A i B leżą na tej samej powierzchni falowej i mają zgodną fazę. Ich różnica dróg jest równa $\Delta s = |AC| - |BC| = |ED| = 2h\sin\alpha$. Jeden z promieni odbija się od ośrodka, w którym prędkość rozchodzenia się fali jest mniejsza niż w powietrzu. Powoduje to zmianę fazy o π, odpowiadającą przebytej drodze $\lambda/2$. Uwzględniając to, otrzymujemy wzór na maksima interferencyjne:

$$\sin\alpha = \frac{(2k+1)\lambda}{4h}, \qquad \text{gdzie } k = 0,1,2,\ldots \text{ i } k \leqslant \frac{4\frac{h}{\lambda}-1}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 1395.

Niech tymi niezerowymi współczynnikami będą a, b i c, stojące zaś przy nich jednomiany nazwijmy odpowiednio u, v i w. Załóżmy, że wśród tych jednomianów najwyższy stopień ma w. Istnieje wtedy zmienna, która występuje w w, ale nie występuje w u lub v – bez utraty ogólności możemy przyjąć, że x_1 ma tę własność. Wówczas

$$f(1,1,\ldots,1) = a+b+c,$$

$$f(-1,1,\ldots,1) = \begin{cases} a+b-c, & \text{gdy } x_1 \text{ nie występuje ani w } u\text{, ani w } v,\\ -a+b-c, & \text{gdy } x_1 \text{ występuje w } u\text{, ale nie w } v,\\ a-b-c, & \text{gdy } x_1 \text{ występuje w } v\text{, ale nie w } u.\end{cases}$$

W pierwszym przypadku mamy $f(1,1,\ldots,1) - f(-1,1,\ldots,1) = 2c$, ale z drugiej strony, skoro $f(\pm1,1,\ldots,1) \in \{-1,1\}$, to $c \in \{-1,1\}$. Z zadania 1394 wiemy, że $a^2+b^2+c^2 = 1$, otrzymujemy więc $a = b = 0$ wbrew założeniu. Pozostałe przypadki wymagają analogicznego rozumowania.

Wielomianem o dokładnie czterech niezerowych współczynnikach spełniającym warunki zadania jest np. $\frac{1}{2}(1 + x_1 + x_2 - x_1x_2)$.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 653 ($WT = 1{,}77$) i 654 ($WT = 2{,}40$) z numeru 1/2013

Wojciech Nadara	Warszawa	46,60
Zbigniew Skalik	Wrocław	43,65
Witold Bednarek	Łódź	43,34
Krzysztof Kamiński	Pabianice	40,24
Paweł Łabędzki	Kielce	39,72
Rami Marcin Ayoush	Szelków	37,83
Jerzy Cisło	Wrocław	37,34
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72

Witamy w Klubie 44 nową postać: Wojtek Nadara.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2013

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

659. Wierzchołki n-kąta foremnego są pokolorowane dwoma kolorami. Co jednostkę czasu pokolorowanie zmienia się: każdy wierzchołek przyjmuje kolor, który bezpośrednio przed tym momentem miała większość z trójki wierzchołków: sam rozważany wierzchołek oraz dwa z nim sąsiadujące. Proces kończy się, gdy nowe pokolorowanie okaże się identyczne z poprzednim (tzn. gdy nic się już nie zmienia). Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyjaśnić, dla jakich początkowych konfiguracji kolorów proces będzie trwał nieskończenie.

660. Dana jest liczba naturalna $k > 1$. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, spełniające nierówność $d(n^k) \leqslant k \cdot d(n)$, gdzie $d(x)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej x.

659. Wierzchołek, sąsiadujący z dwoma wierzchołkami innego koloru niż on sam, nazwijmy *izolowanym*. Wierzchołki, które są (w danym momencie gry) izolowane, i tylko one, zmieniają kolor w najbliższym ruchu. Wierzchołki nieizolowane tworzą bloki (długości co najmniej 2); ich kolor już się nie zmienia – do końca pozostają nieizolowane.

Przypuśćmy, że w jakimś momencie są zarówno wierzchołki izolowane, jak i nieizolowane. Pewien wierzchołek izolowany musi sąsiadować z nieizolowanym. W kolejnym ruchu przejmuje kolor sąsiada i staje się nieizolowanym. Zatem w każdym ruchu liczba wierzchołków izolowanych zmniejsza się. Gdy zejdzie do zera, kolory się ustabilizują.

Proces może więc trwać nieskończenie tylko wtedy, gdy na starcie wszystkie wierzchołki są izolowane – czyli gdy są pokolorowane na przemian (co jest możliwe tylko dla n parzystych). Wówczas po pierwszym ruchu wszystkie kolory zmienią się, po drugim powróci sytuacja początkowa, i ten cykl stale będzie się powtarzał. To jest ta konfiguracja początkowa, o jaką pyta zadanie.

660. Przypuśćmy, że n ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze p, q. Napiszmy $n = p^\alpha q^\beta m$, gdzie $\alpha, \beta \geqslant 1$, zaś czynnik m jest niepodzielny przez p ani q. Iloczyn $p^\alpha q^\beta$ ma $(\alpha+1)(\beta+1)$ dzielników dodatnich; iloczyn $p^{k\alpha} q^{k\beta}$ ma $(k\alpha+1)(k\beta+1)$ dzielników dodatnich. Zatem

$$d(n) = (\alpha+1)(\beta+1)d(m), \qquad d(n^k) = (k\alpha+1)(k\beta+1)d(m^k).$$

Jasne, że $d(m^k) \geqslant d(m)$. Jeśli więc zachodzi postulowana nierówność $d(n^k) \leqslant k \cdot d(n)$, to

$$(k\alpha+1)(k\beta+1) \leqslant k(\alpha+1)(\beta+1);$$

po przekształceniu: $k(k-1)\alpha\beta \leqslant k-1$; a to jest niemożliwe, skoro $k > 1$.

Pozostają do rozważenia liczby n, będące potęgami liczb pierwszych. Każda taka liczba spełnia wymagany warunek; jeśli bowiem $n = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, to

$$d(n^k) = k\alpha + 1 < k(\alpha+1) = k \cdot d(n).$$

Rozwiązanie zadania M 1394.

Z założenia $(f(x))^2 = 1$ dla każdego punktu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1,1\}^n$. Z drugiej strony

$$1 = (f(x))^2 = \left(a_0 + \sum a_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j\right)^2 = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_{ij}^2 + w(x),$$

gdzie $w(x)$ to suma jednomianów postaci x_i i $x_i x_j$ z pewnymi współczynnikami. Kluczem do rozwiązania zadania jest wysumowanie tej równości po wszystkich 2^n punktach kostki dyskretnej. Ponieważ dla ustalonego i zachodzi

$$\sum_{x \in \{-1,1\}^n} x_i = \sum_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n \in \{-1,1\}} \left(\sum_{x_i \in \{-1,1\}} x_i\right) = 0$$

i podobnie dla ustalonych $i < j$ mamy $\sum_{x \in \{-1,1\}^n} x_i x_j = 0$, więc również

$$\sum_{x \in \{-1,1\}^n} w(x) = 0.$$

Zatem

$$2^n = \sum_{x \in \{-1,1\}^n} \left(\sum a_i^2 + \sum b_{ij}^2\right) = 2^n \left(\sum a_i^2 + \sum b_{ij}^2\right).$$