deltoid 56

Identyczne rysunki

Joanna JASZUŃSKA

Czy dwa identyczne rysunki mogą się przydać w jednym zadaniu? Mogą, na przykład gdy drugi jest obrazem pierwszego po pewnej, sprytnie dobranej inwersji (na marginesie przypomnienie głównych własności tego przekształcenia).

Obrazem punktu $A \neq S$ w inwersji względem okręgu $\Gamma = \mathcal{O}(S, r)$ jest taki punkt A^* na półprostej $SA^{\rightarrow}$, że $SA \cdot SA^* = r^2$. Niektóre własności inwersji:

- obrazem punktu A^* jest punkt A,
- jeśli A leży na okręgu Γ, to $A^* = A$,
- obraz figury zawartej w pewnym kącie XSY też jest wewnątrz tego kąta,
- obrazem prostej przechodzącej przez punkt S jest ta sama prosta,
- obrazem okręgu przechodzącego przez punkt S jest prosta nieprzechodząca przez S (i na odwrót),
- obrazem okręgu nieprzechodzącego przez S jest okrąg nieprzechodzący przez S; może to być ten sam okrąg.

Punkt S nazywa się *środkiem inwersji*. Nie definiujemy jego obrazu S^*.

O inwersji przeczytać można m.in. w *deltoidzie* 5/2013.

1. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są rozłączne zewnętrznie, a ich wspólne styczne zewnętrzne przecinają się w punkcie S. Okrąg Γ jest styczny zewnętrznie do okręgów Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że punkty S, P, Q są współliniowe.

2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie BC i okrąg Γ_1 opisany na tym trójkącie. Okrąg Γ_2 jest styczny do prostej BC, ale nie do odcinka BC, oraz do tego łuku BC okręgu Γ_1, do którego należy punkt A. Prosta l, przechodząca przez punkt A, jest styczna do okręgu Γ_2 w punkcie D. Wykaż, że $AD = AB$.

3. Okręgi $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ są styczne wewnętrznie do okręgu Γ odpowiednio w punktach A, B, C, D. Ponadto okręgi Γ_A i Γ_C są styczne zewnętrznie do obu okręgów Γ_B i Γ_D. Proste styczne do okręgu Γ w punktach A i C przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że punkty S, B, D leżą na jednej prostej.

4. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są styczne zewnętrznie i styczne do prostej k odpowiednio w punktach A i B. Odcinek AC jest średnicą okręgu Γ_1. Prosta l przechodzi przez punkt C i jest styczna do okręgu Γ_2 w punkcie D. Wykaż, że $CA = CD$.

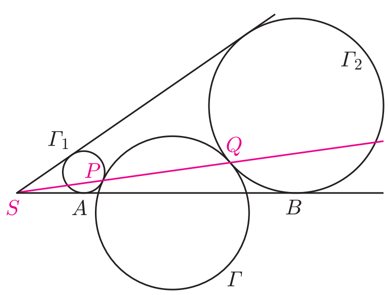
Rozwiązania i wskazówki

R1. Niech A i B będą punktami styczności okręgów odpowiednio Γ_1 i Γ_2 do jednej z danych prostych (rys. 1). Rozważmy inwersję względem okręgu o środku S i promieniu $\sqrt{SA \cdot SB}$. Obie rozpatrywane proste styczne są stałe, bo przechodzą przez środek inwersji S. Punkt A^* leży na półprostej $SA^{\rightarrow}$ i spełnia warunek $SA \cdot SA^* = \sqrt{SA \cdot SB}^2$, stąd $A^* = B$. Obrazem okręgu Γ_1 jest okrąg (bo Γ_1 nie przechodzi przez punkt S), styczny do danych prostych (bo są one stałe) i przechodzący przez punkt $A^* = B$. Wobec tego $\Gamma_1^* = \Gamma_2$, stąd także $\Gamma_2^* = \Gamma_1$.

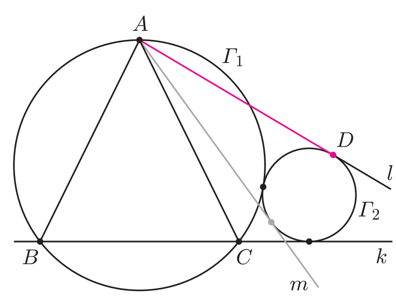
Punkt S leży na zewnątrz okręgu Γ; niech k i l będą prostymi stycznymi do Γ, poprowadzonymi z S. Obrazem Γ jest okrąg styczny do $\Gamma_1^* = \Gamma_2$, $\Gamma_2^* = \Gamma_1$, $k^* = k$ oraz $l^* = l$. Jedynym takim okręgiem jest właśnie Γ, czyli $\Gamma^* = \Gamma$.

Inne rozwiązanie tego zadania opisano w *deltoidzie* 3/2010.

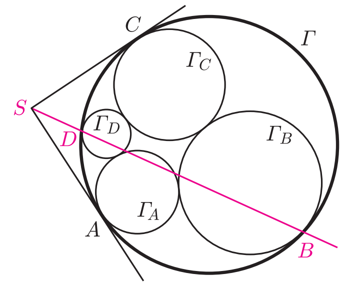
Punkt P to punkt styczności Γ_1 i Γ, więc jego obrazem jest punkt styczności $\Gamma_1^* = \Gamma_2$ i $\Gamma^* = \Gamma$, czyli Q. Środek inwersji S, punkt P i jego obraz Q są współliniowe. □



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wszystkie rysunki są takie same przed inwersją i po, zmieniają się jedynie oznaczenia na nich (pojawia się B^* zamiast A itp.).

R2. Rozważmy inwersję względem okręgu o środku A i promieniu AB (rys. 2). Obrazem okręgu Γ_1, przechodzącego przez środek inwersji A oraz przez punkty B i C, jest prosta przez punkty $B^* = B$ i $C^* = C$, czyli prosta $k = BC$. Stąd też $k^* = \Gamma_1$.

Niech $m \neq l$ będzie prostą przechodzącą przez punkt A i styczną do Γ_2. Obrazem okręgu Γ_2, nieprzechodzącego przez środek inwersji, jest okrąg styczny do $\Gamma_1^* = k$, $k^* = \Gamma_1$, $l^* = l$ oraz $m^* = m$. Jedynym takim okręgiem jest Γ_2, stąd $\Gamma_2^* = \Gamma_2$.

Punkt D to punkt styczności prostej l i okręgu Γ_2, więc jego obrazem jest punkt styczności $l^* = l$ oraz $\Gamma_2^* = \Gamma_2$, czyli on sam: $D^* = D$. Wobec tego z warunku $AD \cdot AD^* = AB^2$ wynika, że $AD = AB$. □

Wskazówka 3. W inwersji względem okręgu o środku S i promieniu SA (rys. 3), okręgi Γ_A, Γ_C i Γ są stałe. Stąd $\Gamma_B^* = \Gamma_D$ oraz $B^* = D$, co daje tezę.

Zadanie 4 pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej z roku 2004.

Wskazówka 4. Okrąg Γ_2 jest stały przy inwersji względem $\mathcal{O}(C, CA)$.