Równe i różne ∞

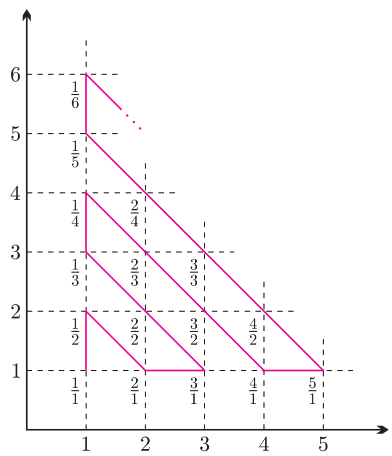
Joanna JASZUŃSKA

Czy nieskończoność jest tylko jedna? Nie, istnieją różne, większe i mniejsze! Zbiory A i B są *równoliczne*, gdy ich elementy można dobrać w pary (każdy element z A ma dokładnie jedną parę w B i na odwrót). Piszemy wtedy $A \sim B$. Jeśli $A \sim \mathbb{N}$, to zbiór A nazywamy *przeliczalnym*; dobranie w pary jego elementów z liczbami naturalnymi odpowiada ustawieniu ich w ciąg: $a_0, a_1, a_2, \ldots$ (element zbioru A, oznaczony jako a_k, jest w parze z liczbą naturalną k).

Zakładamy, że $0 \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q}$ to zbiór liczb wymiernych,
X^+ oznacza zbiór dodatnich liczb z X.

$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. Udowodnimy, że liczb całkowitych, wbrew pozorom, nie jest wcale więcej, niż naturalnych, a dokładnie tyle samo. W tym celu ustawmy je w następujący ciąg: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \ldots$ Każda liczba całkowita występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz, jest ich więc tyle samo, co liczb naturalnych. $\square$

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Wykażemy teraz, że również liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele. Najpierw udowodnimy, że $\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{N}$. W tym celu rozważmy punkty płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych dodatnich. Każdemu takiemu punktowi $\langle x, y\rangle$ przypiszmy dodatnią liczbę wymierną $\frac{x}{y}$. Następnie odwiedźmy po kolei wszystkie te punkty, spacerując po płaszczyźnie zygzakiem o początku w $\frac{1}{1}$, jak na rysunku 1. Spisujmy kolejno odwiedzane liczby wymierne $\frac{x}{y}$, ale bez powtórzeń (np. liczbę $\frac{2}{2}$ pomijamy, bo wcześniej była $\frac{1}{1}$). Otrzymujemy w ten sposób ciąg wszystkich dodatnich liczb wymiernych: $1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$



Rys. 1. Zygzak odwiedza dokładnie raz każdy punkt $\langle x, y\rangle$ dla $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

Aby wykazać, że $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, zastosujmy podobny pomysł, jak przy dowodzie $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ – ustawmy na przemian liczby z powyższego ciągu i liczby do nich przeciwne, a na początku zero: $0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 4, \ldots$ $\square$

$\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. Liczb rzeczywistych jest więcej, niż liczb naturalnych, czyli *nieprzeliczalnie wiele*. Wykażemy, że nieprzeliczalny jest już podzbiór takich liczb z odcinka $[0, 1)$, których rozwinięcie dziesiętne składa się wyłącznie z cyfr 0 i 1.

Załóżmy, że podzbiór ten jest przeliczalny, czyli jego elementy można ustawić w ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Otrzymujemy tabelę (rys. 2); jest ona nieskończona w prawo (liczbom o skończonym rozwinięciu dziesiętnym dopisujemy dalej same zera) oraz w dół (liczb rozważanej postaci jest nieskończenie wiele, m.in. 0,1, 0,01, 0,001, ...).

$$
\begin{array}{lcccccccc}
x_0 = 0, & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
x_1 = 0, & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
x_2 = 0, & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
x_3 = 0, & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
x_4 = 0, & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
x_5 = 0, & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

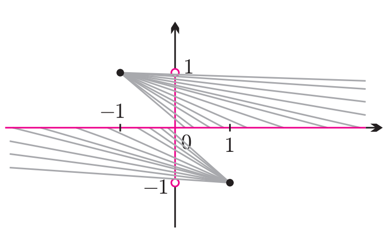
Rys. 2. Przykładowe wartości ciągu $x_0, x_1, x_2, \ldots$ oraz przekątna tabeli. Tutaj $x = 0{,}001011\ldots$

Zapiszmy ciąg cyfr z przekątnej tabeli, a następnie zamieńmy w nim wszystkie 0 na 1, a 1 na 0. Niech liczba x ma w zapisie dziesiętnym zero, a po przecinku uzyskany w ten sposób ciąg cyfr. Wtedy $x \in [0, 1)$ oraz x ma w rozwinięciu dziesiętnym same 0 i 1, zatem z założenia występuje w naszym ciągu $x_0, x_1, x_2, \ldots$, czyli w którymś wierszu rozważanej tabeli. Nie jest on równy x_0, bo wskutek zamiany 0 i 1 z przekątnej, od liczby w pierwszym wierszu różni się na pierwszym miejscu po przecinku. Podobnie $x \neq x_1$, bo od liczby w drugim wierszu różni się na drugim miejscu po przecinku. Analogicznie x nie jest równy żadnej z pozostałych liczb z naszego ciągu, bo od liczby w k-tym wierszu różni się na k-tym miejscu po przecinku. Zbudowaliśmy więc liczbę z rozważanego zbioru, ale spoza ciągu, który miał zawierać wszystkie jego elementy. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że zbiór ten jest nieprzeliczalny, zatem także $[0, 1) \nsim \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. $\square$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$. Gdyby liczb niewymiernych było przeliczalnie wiele, można by ustawić je w ciąg $t_0, t_1, t_2, \ldots$ Wykorzystując nasz ciąg liczb wymiernych, uzyskalibyśmy ciąg wszystkich liczb rzeczywistych: $0, t_0, 1, t_1, -1, t_2, \frac{1}{2}, t_3, -\frac{1}{2}, t_4, 2, t_5, -2, t_6, 3, \ldots$ Wiemy jednak, że $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$, zatem to niemożliwe. Stąd $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$. $\square$

Można dowieść, że $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$.

$(-1, 1) \sim \mathbb{R}$. Pokażemy teraz, że odcinek zawiera tyle samo punktów, co prosta. Najpierw wykażemy, że $(0, 1) \sim \mathbb{R}^+$. Rozważmy odcinek $(0, 1)$ na osi OY oraz dodatnią półoś OX (rys. 3). Zapalmy latarkę w punkcie $\langle -1, 1\rangle$ i każdemu punktowi z odcinka $(0, 1)$ przydzielmy do pary jego cień na półprostej $\mathbb{R}^+$.



Rys. 3

Analogicznie, punktom z odcinka $(-1, 0]$ przydzielamy pary z niedodatniej półosi OX (latarka w punkcie $\langle 1, -1\rangle$), co wobec powyższego daje $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$. $\square$

Twierdzenie Cantora orzeka, że każdy zbiór ma więcej podzbiorów niż elementów. Stąd dla dowolnego zbioru nieskończonego istnieje zbiór jeszcze od niego większy! Opisane powyżej zbiory, równoliczne z $\mathbb{N}$ lub $\mathbb{R}$, to tylko niektórzy, najczęściej spotykani przedstawiciele zbiorów nieskończonych.