

Po co mi nieskończoność?

Jerzy TYSZKIEWICZ

Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

Po to, żeby twierdzenie o pełności zachodziło.

Wiem, że po tej deklaracji nie mam wyjścia i muszę wytłumaczyć, o co chodzi.

Zajmuję się logiką. Logika dla matematyków to trochę jak gramatyka historyczna dla polonistów: nauka o języku, którym się posługują. Język ten jest złożony z formuł, będących napisami, które z kolei wyrażają własności struktur matematycznych, na przykład podzbiorów prostych (których jest nieskończenie wiele) albo algebry wartości logicznych **prawda** i **fałsz**, która jest skończona.

Jednym z najważniejszych w logice jest twierdzenie o pełności dla logiki pierwszego rzędu, które udowodnił jako pierwszy Kurt Gödel.

Orzeka ono, że każdą własność struktur matematycznych, którą da się wyrazić w logice pierwszego rzędu i która przysługuje wszystkim bez wyjątku strukturom, można także udowodnić, posługując się formalnym systemem dowodowym. Własności przysługujące wszystkim strukturom nazywa się tautologiami i można o nich myśleć jako o fundamentalnych prawach matematycznego świata, sformułowanych za pomocą sztywnego, skodyfikowanego języka logiki. Z kolei system dowodowy opiera się na ściśle

określonych manipulacjach na napisach, którymi są formuły logiki, w oderwaniu od wszelkich intuicji czy odwołań do świata struktur. Formułę, dla której znajdzie się dowód w tym systemie, nazywa się twierdzeniem.

Twierdzenie o pełności mówi, że zbiory tautologii i twierdzeń są identyczne: jak coś jest prawdziwe w każdej strukturze, to ma także formalny dowód, a jak ma dowód, to jest prawdziwe we wszystkich strukturach.

Nieformalnie, matematyk ścisły formalista (tak sobie wyobrażam użytkowników systemu dowodowego) i matematyk odwołujący się do rozumienia i znaczenia formuł (powiedzmy o nim, że to matematyk platonista) tworzą i badają **tę samą** matematykę.

Kluczowe dla twierdzenia o pełności jest to, że dopuszczone są w nim także struktury nieskończone jako obiekty, których własności wyraża logika. Z twierdzenia Trachtenbrota wynika, że dla zbioru formuł prawdziwych we wszystkich strukturach skończonych (ale niekoniecznie prawdziwych w strukturach nieskończonych) nie dałoby się stworzyć stosownego systemu dowodowego. W świecie bez struktur nieskończonych drogi matematyka-formalisty i matematyka-platonisty by się rozeszły.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1390. Dany jest punkt P wewnątrz trójkąta równobocznego ABC (rys. 1). Udowodnić, że

$$|\sphericalangle PAB - \sphericalangle PAC| \geq |\sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB|.$$

Rozwiązanie na str. 3

M 1391. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie na str. 6

M 1392. Pokolorowano pewne odcinki okręgu o łącznej długości większej niż połowa obwodu tego okręgu (rys. 2). Udowodnić, że istnieją dwa punkty antypodyczne, tzn. symetryczne względem środka okręgu, które są pokolorowane.

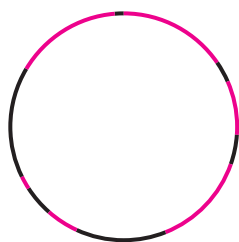
Rozwiązanie na str. 13

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

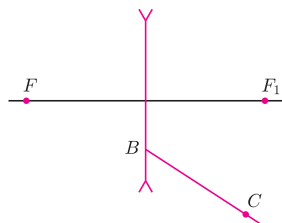
F 835. Na rysunku 3 przedstawiono bieg promienia BC wychodzącego z soczewki rozpraszającej, której ogniska znajdują się w punktach F i F_1 . Znaleźć metodą geometryczną bieg promienia padającego na soczewkę w punkcie B .

Rozwiązanie na str. 17

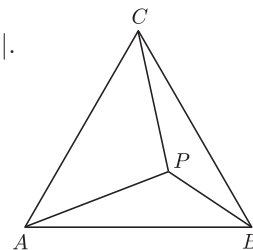
F 836. Podniesienie stanu wody w zbiorniku prowadzi do jej „przelania się” przez tamę. Ile razy wzrośnie masa wody przelewającej się przez tamę w jednostce czasu, jeśli poziom wody nad krawędzią tamy wzrośnie k razy? Zakładamy, że w obu przypadkach poziom wody nieznacznie przewyższa tamę. Rozwiązanie na str. 8



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 1