Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 550 ($WT = 1{,}24$) i 551 ($WT = 2{,}32$) z numeru 1/2013

Tomasz Wietecha	Tarnów	44,48
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	43,72
Andrzej Idzik	Bolesławiec	35,06
Krzysztof Magiera	Łosiów	33,91
Michał Koźlik	Gliwice	24,63

Po raz dziewiąty liczbę 44 punktów przekroczył Tomasz Wietecha. Gratulujemy!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

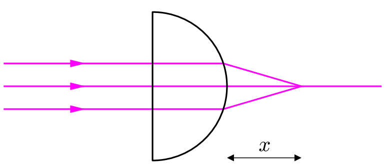
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2013

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

554. Wzdłuż gumowego sznura o długości l i współczynniku sprężystości k zsuwa się w kierunku pionowym żelazny pierścień o masie m. Siła tarcia między powierzchnią sznura a pierścieniem wynosi T. Wyznacz ciepło, które się przy tym wydziela.

555. Wąska wiązka światła po przejściu przez półkulę ze szkła o współczynniku załamania n skupia się w odległości x od powierzchni wypukłej (rys. 1). W jakiej odległości od powierzchni płaskiej skupią się promienie, jeżeli wiązkę światła przepuścimy przez półkulę z drugiej strony?



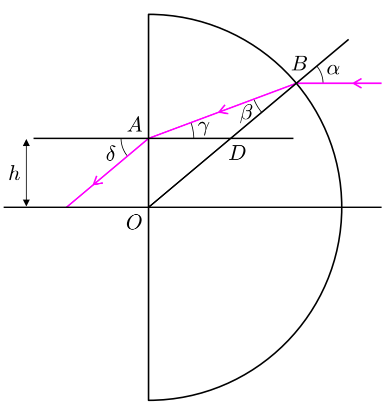
Rys. 1

554. Oznaczmy przez Δl maksymalne wydłużenie sznura. Stwierdzenie, że pierścień jest żelazny, wskazuje, że masę sznura możemy zaniedbać w porównaniu z masą pierścienia. Wtedy mamy $T - k\Delta l \approx 0$. Na sznur działa siła tarcia, która powoduje jego wydłużenie, czyli wzrost energii sprężystości oraz wydzielanie się ciepła Q: $T(l + \Delta l) = Q + k(\Delta l)^2/2$. Wiedząc, że $\Delta l = T/k$, otrzymujemy:

$$Q = T\left(l + \frac{T}{2k}\right).$$

Zadanie można też rozwiązać, rozważając siły działające na pierścień. Zmiana energii kinetycznej pierścienia równa jest pracy wypadkowej sił ciężkości i tarcia: $\frac{mv^2}{2} = (mg - T)(l + \Delta l)$, natomiast zasada zachowania energii dla całego układu sznur–pierścień ma postać: $\frac{mv^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2} + Q = mg(l + \Delta l)$. Odejmując te równania stronami, otrzymujemy taki sam wynik jak poprzednio.

555. Oznaczmy promień krzywizny półkuli przez R. Gdy wiązka pada prostopadle na płaską powierzchnię szkła, biegnie przez szkło bez zmiany kierunku. Odległość x nie zmieni się, gdy wiązkę przepuścimy przez cienką soczewkę płasko-wypukłą ze szkła o promieniu krzywizny R umieszczoną w powietrzu (rys. 1). Ogniskowa tej soczewki jest równa x, mamy więc związek $R = (n - 1)x$.



Rys. 2

Rozważmy wiązkę padającą na półkulę od strony wypukłej. Oznaczmy przez $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kąty padania i załamania przy przechodzeniu światła z jednego ośrodka do drugiego, jak na rysunku 2. Założenie, że wiązka światła jest wąska, oznacza, że odległości promieni od osi optycznej są małe w porównaniu z promieniem krzywizny i możemy stosować przybliżenia właściwe dla małych kątów. Korzystając z prawa załamania, otrzymujemy:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = n \approx \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{oraz} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n} \approx \frac{\beta}{\alpha}.$$

Kąt α jest kątem zewnętrznym w trójkącie ABD, zatem $\alpha = \beta + \gamma$. Niech h będzie odległością promienia wychodzącego z półkuli od osi optycznej. Stosując twierdzenie sinusów do trójkąta OAB, otrzymujemy: $\frac{h}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \delta)}$, a w przybliżeniu $h/R \approx \beta$. Szukaną odległość f punktu skupienia promieni od powierzchni płaskiej dostajemy ze związków:

$$h/f = \delta = n\gamma = n(\alpha - \beta) = n\beta(n - 1) = n(n - 1)h/R.$$

Ostatecznie $f = x/n$.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 651 ($WT = 1{,}95$) i 652 ($WT = 2{,}45$) z numeru 12/2012

Wojciech Nadara	Warszawa	42,43
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Witold Bednarek	Łódź	40,94
Paweł Łabędzki	Kielce	37,95
Krzysztof Kamiński	Pabianice	37,84
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,72
Jerzy Cisło	Wrocław	34,66

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2013

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

657. W okienka tabeli prostokątnej, mającej m kolumn i n wierszy, wpisujemy liczby 0 lub 1 tak, by w każdym kwadracie 2×2, złożonym z czterech pól mających wspólny wierzchołek, suma czterech wpisanych liczb była nieparzysta. Dla zadanej liczby naturalnej $m \geqslant 2$ znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których da się w taką tabelę wpisać zera i jedynki w opisany sposób tak, by żadne dwa wiersze nie były identyczne.

658. W przestrzeni dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a oraz dowolny punkt P. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu P od wierzchołków czworościanu. Wykazać, że

$$(a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)^2 = 4(a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4).$$

657. W każdym wierszu numerujemy pola od lewej strony kolejno od 1 do m. Podany warunek (nieparzyste sumy w kwadratach 2×2) oznacza, że w dowolnych dwóch sąsiednich wierszach pola o numerach parzystych są wypełnione jednakowo, a pola o numerach nieparzystych są wypełnione różnie – lub że jest odwrotnie. Pomalujmy linię poziomą, która te wiersze rozdziela, na szaro w pierwszym przypadku, a na żółto w drugim.

Jeżeli istnieją dwie kolejne linie pomalowane tym samym kolorem, to zawarty pomiędzy nimi wiersz rozdziela dwa wiersze, które są wypełnione identycznie. Stąd wynika, że jeśli chcemy mieć n wierszy parami różnych, $n > 2$, to jednakowo pomalowane linie nie mogą sąsiadować. Linie szare i żółte występują wówczas na przemian, więc każde dwa wiersze o numerach różniących się o 2 są wypełnione dokładnie przeciwnie (w kolumnach, gdzie górny ma zera, dolny ma jedynki, i na odwrót). Wobec tego wiersze o numerach różniących się o 4 są już wypełnione identycznie.

Wniosek: niezależnie od m, maksymalna liczba parami nieidentycznych wierszy nie przekracza 4. Przy tym łatwo wskazać przykład takiej macierzy z dokładnie 4 wierszami:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \end{matrix}$$

Zatem liczby n, o które pyta zadanie – to 2, 3, 4.

658. Umieszczamy czworościan w przestrzeni czterowymiarowej, tak, by jego wierzchołkami były punkty

$$A_1 = (1,0,0,0), \quad A_2 = (0,1,0,0), \quad A_3 = (0,0,1,0), \quad A_4 = (0,0,0,1).$$

Dla $i \neq j$ mamy wówczas

$$|A_iA_j|^2 = (1-0)^2 + (0-1)^2 = 2,$$

co się zgadza z treścią zadania, gdy $a = \sqrt{2}$. Nie ogranicza to ogólności rozumowania, bo równość podana do udowodnienia ma po obu stronach wyrażenia jednorodne stopnia 4.

Weźmy dowolny punkt $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, leżący w tej samej przestrzeni trójwymiarowej, co punkty A_i, czyli taki, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Przyjmijmy, że leży on w odległości r od początku układu współrzędnych: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$. Obliczamy:

$$\begin{aligned} d_i^2 &= |PA_i|^2 = (x_i - 1)^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2 = r^2 + 1 - 2x_i, \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 &= 4(r^2+1) - 2, \\ d_i^4 &= (r^2+1)^2 - 4(r^2+1)x_i + 4x_i^2, \\ d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 &= 4(r^2+1)^2 - 4(r^2+1) + 4r^2 = 4(r^2+1)^2 - 4, \\ a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 &= 4(r^2+1), \\ a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 &= 4(r^2+1)^2. \end{aligned}$$

Dwie ostatnie równości dają tezę zadania.

(*Autor rozwiązania*: *Jerzy Cisło.*)