Czy nieskończoność *JEST*?

Michał SZUREK[*]

Rozwiązanie zadania M 1391.
Zastosujemy metodę tzw. *nieskończonego schodzenia* (zob. L. Kurlyandchik, *Złote rybki w oceanie matematyki*, TUTOR 2005).

Przypuśćmy przeciwnie, że x_0, y_0, z_0 to liczby całkowite dodatnie, takie że $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2x_0y_0z_0$. Ponieważ prawa strona jest liczbą parzystą, to dokładnie dwie z liczb x_0, y_0, z_0 są nieparzyste lub żadna nieparzysta nie jest. Pierwszy przypadek nie może mieć miejsca, gdyż wówczas lewa strona przy dzieleniu przez 4 dałaby resztę 2, zaś prawa 0. Dlatego $x_0 = 2x_1$, $y_0 = 2y_1$, $z_0 = 2z_1$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich x_1, y_1, z_1, mniejszych od x_0, y_0, z_0 odpowiednio. Po wstawieniu do równania otrzymujemy zależność $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$. Powtarzając całe rozumowanie, dostajemy malejące ciągi liczb całkowitych dodatnich $(x_n), (y_n), (z_n)$, przy czym $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 2^{n+1}x_ny_nz_n \geqslant 2^{n+1}$, co jest niemożliwe.

Wacław Sierpiński polecił, by na jego grobie wyryto napis *Badacz nieskończoności.* André Weil, matematyk francuski, 1906–1998, założyciel i faktyczny lider tzw. grupy Bourbaki, a więc grupy odpowiedzialnej za wprowadzenie do szkół na całym świecie „nowej matematyki” lat siedemdziesiątych, powiedział, że gdyby ktoś chciał mieć jednozdaniową definicję matematyki, to należałoby powiedzieć, że jest to nauka o nieskończoności. Wyraził tym zgodną opinię, dominującą co najmniej przez trzy czwarte poprzedniego stulecia.

Matematycy lubią zbiory nieskończone do tego stopnia, że wyróżniają zbiory mniej i bardziej nieskończone. Oto prosta konstrukcja myślowa. Dla danego zbioru X utwórzmy zbiór jego podzbiorów, $\mathcal{P}(X)$. Na przykład dla $X = \{1, 2, 3\}$ mamy osiem podzbiorów: pusty, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. Gdy X jest zbiorem skończonym o n elementach, to $\mathcal{P}(X)$ ma aż 2^n elementów. Matematycy robią z tego twierdzenie: nie ma odpowiedniości (tj. funkcji) wzajemnie jednoznacznej między elementami zbioru a wszystkimi jego podzbiorami i fakt, że 3 jest mniejsze od 8, uogólniają tak, by dał się zastosować do dowolnych zbiorów. Podzbiorów jest „bardzo więcej” niż elementów.

To twierdzenie dobrze działa na dusze matematyków – pokazuje im (tzn. nam) nieskończoną liczbę pięter nieskończoności, coraz obfitszych, coraz tłustszych, nie tak, jak chudziutkie $\aleph_0$, oznaczające najprostszą nieskończoność – tę, która jest udziałem ciągu liczb naturalnych $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Równie ciepło myślimy o dowodzie, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Przypomnę. Gdyby liczb pierwszych było skończenie wiele, to ich iloczyn, powiększony o jedynkę, byłby… nową liczbą pierwszą, albo przynajmniej przez jakąś nową liczbę pierwszą by się dzielił.

W roku 2012 miałem semestralny wykład o matematyce dla wybranych studentów Instytutu Kultury Polskiej Uniwersytetu Warszawskiego. Instytut ma ambicje przyciągania najlepszych studentów, kształcących się w kierunkach humanistycznych. Nikt z nich, ale dosłownie nikt, nie zrozumiał tego dowodu nieskończoności zbioru liczb pierwszych, nie pojął, o co chodzi w tym przecież pięknym rozumowaniu. Bodaj najlepszy ze studentów, germanista, powiedział szczerze: *Każde ogniwo wnioskowania rozumiem, ale w cały dowód nie wierzę. Nie rozumiem, jak czegoś może BYĆ nieskończenie wiele.*

Poza problemem ontologicznym podnosił też pragmatyczny – przecież liczby w rodzaju 752957289562659229057222025729 57 to nie jest rzeczywistość, to jeno nieodpowiedzialne konstrukcje myślowe, więc może jeśli nawet czegoś tam jest nieskończenie wiele, to te dalekie obiekty nie mają już znaczenia, można je zaniedbać.

Z refleksji nad tym, że bardzo wielkie liczby jawią nam się jako nieco inne twory, pojawiła się idea rozważania matematyki opartej na naszych aktualnych możliwościach poznawczych. W tej teorii operacje arytmetyczne nie są zawsze określone, bardzo wielkie liczby są „naturalne”, ale nie można ich interpretować jako zbiór jednostek (kropek, kresek, punktów, misiów pluszowych i tak dalej). Ponadto w zbiorze liczb „naturalnych” mogą być „luki” – nie wszystkie napisy to „naturalnie istniejące” liczby. Taki kierunek w podstawach matematyki nazywany jest *aktualizmem.* Zdecydowane próby stworzenia takiej matematyki podjął w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku Aleksandr Siergiejewicz Jesienin-Wołpin. Podważył on tak niewzruszone prawdy matematyczne, jak na przykład to, że operację „dodaj jeden” można stosować nieskończoną liczbę razy. Wszyscy bowiem wiemy, że następujące rozumowanie jest teoretycznie poprawne, ale… nic z tego nie wynika. Mianowicie można bez odpoczynku dojść piechotą z Lizbony do Białegostoku. Dowód: pierwszy krok oczywiście łatwo postawić. Jeżeli jednak postawię już dowolną liczbę kroków, to jeszcze jeden mały kroczek na pewno będę w stanie postawić. Tego typu rozumowania właśnie próbował zanegować Jesienin-Wołpin. Kiedyś nie zdołamy tego kroku postawić.

Konsekwencją tak pojętego aktualizmu byłoby też odrzucenie reguły odrywania, czyli najbardziej podstawowej reguły wnioskowania, wyodrębnionej już w średniowieczu reguły *modus ponens*: *Jeżeli prawdziwe jest zdanie α oraz prawdziwa jest implikacja (α to β), to prawdziwe jest też zdanie β.* Można sobie przecież wyobrazić, że długość dowodu formuły α, jak i długość dowodu implikacji (α to β), są dostępnymi liczbami naturalnymi, a ich suma już nie.

[*]Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Teoria Jesienina-Wołpina jest, owszem, ambitną próbą intelektualną, a jednak nie mamy wątpliwości, że jest udziwniona. Czy nie lepiej, np. zbierając grzyby, wierzyć, że ZAWSZE znajdzie się następny? Taką koncepcję nieustannego stawania się nazywamy nieskończonością potencjalną.

A przecież nieskończoności używamy też praktycznie, wierząc, że choćby woda ma strukturę ciągłą (bo inaczej, jak pływać?), mimo iż mędrcy wmawiają nam, że to zbiorowisko oddzielnych cząstek.

Nasze zmysły nie są cyfrowe, są analogowe – a zatem dopuszczają nieskończoną ilość stanów. Bez pojęcia nieskończoności bylibyśmy tak bezbronni jak... komputery bez systemu operacyjnego, jak dzieci we mgle.

Nieskończoność. Cóż za pojęcie! *Si non è vero, è ben trovato.* Jeśli to nawet nie jest prawdziwe, to jednak dobrze wymyślone.

Tak, jak i cała matematyka...

Czy nieskończoność jest potrzebna?

Bronisław WAJNRYB
Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Dla mnie odpowiedź nie jest oczywista. W pierwszej chwili pomyślałem, że nie jest potrzebna, ale to było sprowokowane samym pytaniem.

Potem zacząłem szukać argumentów za nieskończonością. W teorii liczb szukamy nieskończenie wielu liczb pierwszych bliźniaczych. W analizie mówimy o ciągach zbieżnych. Wiele twierdzeń o istnieniu jest prawdziwych tylko w przestrzeniach zupełnych, które trudno zdefiniować bez nieskończoności.

Ale co by było, gdyby nieskończoność zamienić na jakąś dużą liczbę, np. $\infty = 9^{9^9}$?

Przecież w obserwowalnym wszechświecie jest tylko skończona liczba atomów. Na prostej jest „fizycznie” tylko skończona ilość punktów. Rachunki robione za pomocą komputerów są skończone, dalekie od powyższej nieskończoności, a coraz częściej się na nich opieramy.

Jeśli chcemy coś udowodnić dla tak dużych liczb, musimy nadal korzystać z indukcji matematycznej. W topologii bardzo wiele problemów sprowadza się do obiektów kawałkami liniowych, które są określone przez skończoną ilość danych.

W końcu skłaniam się ku stwierdzeniu, że nieskończoność nie jest bardzo ważna, ale nie wypędzałbym jej całkowicie, dałbym jej żyć na uboczu, choćby ze względu na teorię zbiorów, która bez nieskończoności i bez różnych mocy i porządków strasznie by zubożała. Też najróżniejsze kontrprzykłady, które pozwalają lepiej zrozumieć matematykę, są bardzo często oparte na nieskończoności.

Mniej więcej tak napisałbym pół roku temu. Może dodałbym jeszcze kilka przykładów za i przeciw nieskończoności. Ale pół roku temu zacząłem zajmować się problemem średniowalności (*amenability*) dla niektórych grup skończenie generowanych.

Próbuję rozstrzygnąć, czy dla danej grupy G istnieje miara skończona, skończenie addytywna, która jest określona dla wszystkich podzbiorów grupy G i jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia z lewej strony (to znaczy gdy mnożymy wszystkie elementy podzbioru A z lewej strony przez dowolny ustalony element grupy G, to miara nowego zbioru jest taka jak miara zbioru A).

Dla grup skończonych wystarczy wziąć ilość elementów $|A|$ zbioru A jako jego miarę.

Dla grup nieskończonych, na przykład dla $\mathbb{Z}$, problem jest trudny. Dla $\mathbb{Z}$ byłoby naturalne wziąć gęstość zbioru A, to znaczy $\lim \frac{|A\cap[-n,n]|}{2n+1}$, ale nie każdy zbiór ma gęstość, granica może nie istnieć, a górna granica nie jest addytywna. Żeby udowodnić istnienie takiej miary na $\mathbb{Z}$, musimy korzystać z ultrafiltrów, w szczególności z lematu Zorna–Kuratowskiego.

Zafascynował mnie ten problem (choć jest on dosyć daleki od tego, czym się zwykle zajmuję) i wielu innych matematyków zajmuje się tym problemem od wielu lat, a bez nieskończoności problem by nie istniał.

Oczywiście, można zapytać, po co zajmować się takim problemem? Wtedy życie nieskończoności znów zawisłoby na włosku. Ale ja nie rozważam pytania, czy nieskończoność potrzebna jest „zwykłym ludziom”, tylko czy potrzebna jest matematykom, na przykład mnie. Dla matematyka fascynacja problemem jest bardzo dobrym powodem, żeby się nim zajmować. Więc głosuję TAK:

nieskończoność jest potrzebna.