Teoria Jesienina-Wołpina jest, owszem, ambitną próbą intelektualną, a jednak nie mamy wątpliwości, że jest udziwniona. Czy nie lepiej, np. zbierając grzyby, wierzyć, że ZAWSZE znajdzie się następny? Taką koncepcję nieustannego stawania się nazywamy nieskończonością potencjalną.

A przecież nieskończoności używamy też praktycznie, wierząc, że choćby woda ma strukturę ciągłą (bo inaczej, jak pływać?), mimo iż mędrcy wmawiają nam, że to zbiorowisko oddzielnych cząstek.

Nasze zmysły nie są cyfrowe, są analogowe – a zatem dopuszczają nieskończoną ilość stanów. Bez pojęcia nieskończoności bylibyśmy tak bezbronni jak… komputery bez systemu operacyjnego, jak dzieci we mgle.

Nieskończoność. Cóż za pojęcie! *Si non è vero, è ben trovato.* Jeśli to nawet nie jest prawdziwe, to jednak dobrze wymyślone.

Tak, jak i cała matematyka…

Czy nieskończoność jest potrzebna?

Bronisław WAJNRYB
Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Dla mnie odpowiedź nie jest oczywista. W pierwszej chwili pomyślałem, że nie jest potrzebna, ale to było sprowokowane samym pytaniem.

Potem zacząłem szukać argumentów za nieskończonością. W teorii liczb szukamy nieskończenie wielu liczb pierwszych bliźniaczych. W analizie mówimy o ciągach zbieżnych. Wiele twierdzeń o istnieniu jest prawdziwych tylko w przestrzeniach zupełnych, które trudno zdefiniować bez nieskończoności.

Ale co by było, gdyby nieskończoność zamienić na jakąś dużą liczbę, np. $\infty = 9^{9^9}$?

Przecież w obserwowalnym wszechświecie jest tylko skończona liczba atomów. Na prostej jest „fizycznie” tylko skończona ilość punktów. Rachunki robione za pomocą komputerów są skończone, dalekie od powyższej nieskończoności, a coraz częściej się na nich opieramy.

Jeśli chcemy coś udowodnić dla tak dużych liczb, musimy nadal korzystać z indukcji matematycznej. W topologii bardzo wiele problemów sprowadza się do obiektów kawałkami liniowych, które są określone przez skończoną ilość danych.

W końcu skłaniam się ku stwierdzeniu, że nieskończoność nie jest bardzo ważna, ale nie wypędzałbym jej całkowicie, dałbym jej żyć na uboczu, choćby ze względu na teorię zbiorów, która bez nieskończoności i bez różnych mocy i porządków strasznie by zubożała. Też najróżniejsze kontrprzykłady, które pozwalają lepiej zrozumieć matematykę, są bardzo często oparte na nieskończoności.

Mniej więcej tak napisałbym pół roku temu. Może dodałbym jeszcze kilka przykładów za i przeciw nieskończoności. Ale pół roku temu zacząłem zajmować się problemem średniowalności (*amenability*) dla niektórych grup skończenie generowanych.

Próbuję rozstrzygnąć, czy dla danej grupy G istnieje miara skończona, skończenie addytywna, która jest określona dla wszystkich podzbiorów grupy G i jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia z lewej strony (to znaczy gdy mnożymy wszystkie elementy podzbioru A z lewej strony przez dowolny ustalony element grupy G, to miara nowego zbioru jest taka jak miara zbioru A).

Dla grup skończonych wystarczy wziąć ilość elementów $|A|$ zbioru A jako jego miarę.

Dla grup nieskończonych, na przykład dla $\mathbb{Z}$, problem jest trudny. Dla $\mathbb{Z}$ byłoby naturalne wziąć gęstość zbioru A, to znaczy $\lim \frac{|A\cap[-n,n]|}{2n+1}$, ale nie każdy zbiór ma gęstość, granica może nie istnieć, a górna granica nie jest addytywna. Żeby udowodnić istnienie takiej miary na $\mathbb{Z}$, musimy korzystać z ultrafiltrów, w szczególności z lematu Zorna–Kuratowskiego.

Zafascynował mnie ten problem (choć jest on dosyć daleki od tego, czym się zwykle zajmuję) i wielu innych matematyków zajmuje się tym problemem od wielu lat, a bez nieskończoności problem by nie istniał.

Oczywiście, można zapytać, po co zajmować się takim problemem? Wtedy życie nieskończoności znów zawisłoby na włosku. Ale ja nie rozważam pytania, czy nieskończoność potrzebna jest „zwykłym ludziom”, tylko czy potrzebna jest matematykom, na przykład mnie. Dla matematyka fascynacja problemem jest bardzo dobrym powodem, żeby się nim zajmować. Więc głosuję TAK:

nieskończoność jest potrzebna.