Słowa, słowa, słowa...

Marek KORDOS

Tekst ten dedykuję pamięci Profesora Friedricha Bachmanna, którego poparcia miałem zaszczyt doświadczyć.

Słowa, którymi będziemy się zajmowali, będą napisami złożonymi z liter jednego lub kilku zbiorów (na początek przyjmijmy, że zbiory są dwa – jeden zawiera małe litery łacińskie, a drugi duże) o tej własności, że dwie jednakowe litery umieszczone po kolei będą znikały. Napis, w którym wszystko znikło (czasem i taki jest potrzebny), będzie oznaczany 1.

Przykład. Zbiór jest jeden, a litery są dwie: a i b. Wprowadzamy dodatkowy warunek $abab = 1$. Co opisują te słowa?

Algebraik odpowie: to grupa Kleina, czteroelementowa grupa niecykliczna. **Geometra** stwierdzi, że to grupa izometrii własnych prostokąta, czyli sposobów położenia banknotu na jego obrysie.

Słowo *grupa* jest dobrze dobrane do naszych słów. Faktycznie, dopisywanie jednego do drugiego można traktować jak działanie (będziemy o nim mówić: *mnożenie*). Elementem neutralnym jest wtedy 1, a elementem przeciwnym do $a_1 a_2 \ldots a_n$ jest $a_n a_{n-1} \ldots a_1$. Łączność dopisywania nie wymaga uzasadnień. Zatem nasze słowa przy dowolnym wyborze zbiorów liter tworzą grupę.

W tej terminologii wszystkie litery są inwolucjami (czyli są odwrotne do siebie) i dlatego takie grupy nazywają się *inwolutywne*.

Grupy takie mogą się różnić nie tylko zbiorami liter, ale też dodatkowymi warunkami pozwalającymi (jak w powyższym przykładzie) skracać słowa.

Rozwiązanie zadania F 833.
Długość λ fali generowanego dźwięku jest proporcjonalna do długości L piszczałki (współczynnik zależy od rodzaju piszczałki i nie zależy od rodzaju wypełniającego ją gazu), z definicji: $c = \lambda f$, a więc częstotliwość f dźwięku danej piszczałki jest proporcjonalna do prędkości dźwięku w wypełniającym ją gazie. Powietrze to w ponad 99% mieszanina dwuatomowych cząsteczek azotu (N_2) i tlenu (O_2) o wypadkowej masie molowej $\mu_P = 28{,}84$ g/mol. Cząsteczki helu, gazu szlachetnego, są jednoatomowe: $\mu_{He} = 4{,}00$ g/mol. Jak wiadomo, stosunek c_p/c_V dla gazu jednoatomowego wynosi w przybliżeniu 5/3, a dla gazu dwuatomowego 7/5. Po podstawieniu tych danych otrzymujemy

$$f/f_0 = \sqrt{\frac{28{,}84 \cdot 5/3}{4{,}00 \cdot 7/5}} \approx 2{,}39,$$

a więc poszukiwana częstotliwość $f \approx 1289$ Hz.

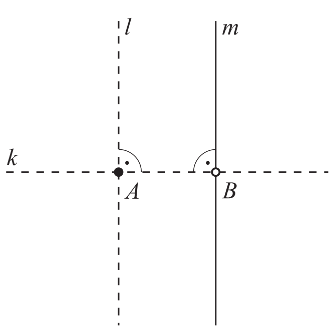
Fanaberia Leibniza, czyli motywacja historyczna

Gottfried Friedrich Wilhelm Leibniz (1646–1716) ogromną wagę przywiązywał do języka, w jakim formułuje się prawa każdej z dyscyplin nauki – twierdził, że każda dyscyplina powinna mieć własny. W szczególności twierdził, że geometria analityczna to odrażająca hybryda: do geometrii używa się języka algebry. W geometrii można liczyć, ale na obiektach geometrycznych – twierdził.

Nikt nie brał tego postulatu poważnie, aż pod koniec XIX wieku Juhasson Hjelmslev (1873–1950) stwierdził, że można rachować na podprzestrzeniach, utożsamiając je z symetriami względem tych podprzestrzeni. Przyjrzyjmy się temu na płaszczyźnie.

Co dla różnych prostych k i l oznacza napis $kl = lk$? Chwila namysłu pozwoli nam zauważyć, że złożenie dwóch symetrii osiowych to przesunięcie (ale wtedy obie strony oznaczałyby przesunięcia w przeciwnych kierunkach) lub obrót. Zatem rozważana równość to stwierdzenie, że dwa obroty o ten sam kąt, ale o przeciwnym zwrocie, są równe: co to za kąt? Oczywiście, kąt półpełny! Zatem proste muszą tworzyć kąt o połowę mniejszy, czyli **są prostopadłe**.

Proste spełniające podany warunek mają jeszcze i tę własność, że dla pewnego punktu P (nie ukrywajmy – punktu ich przecięcia) mamy równość $kl = lk = P$, bo przecież obrót o kąt półpełny to symetria względem środka obrotu.



Rys. 1. Oba przekształcenia to symetrie z poślizgiem (czyli złożenia symetrii z przesunięciem o wektor równoległy do jej osi). Że przesunięcia są przeciwne, łatwo zauważyć pisząc $mlk = lkm = lmk$. Jeśli to obustronnie pomnożymy przez k (i k zniknie), to otrzymamy $ml = lm$, czyli dwa przeciwne przesunięcia.

Co wobec tego oznacza napis $mA = Am$? Spójrzmy na rysunek 1. Dobierając proste k i l tak, by było $km = mk$ oraz $kl = lk = A$, otrzymujemy $mlk = klm$, a więc prawa strona badanej równości to złożenie symetrii względem k z przesunięciem o wektor $2\overrightarrow{AB}$, podczas gdy lewa to złożenie przesunięcia o $2\overrightarrow{BA}$ z symetrią względem k. To jest to samo tylko wtedy, gdy $A = B$, czyli badany napis oznacza, że A **leży na** m.

Można by zatem – wobec tych obserwacji – podejrzewać, że za pomocą wprowadzonych na początku słów potrafimy w szczególności opisać geometrię płaszczyzny. I tak jest w istocie.

Kończąc dygresję historyczną, wypada powiedzieć, że kluczowym pojęciem pozwalającym na zrealizowanie fanaberii Leibniza było wyróżnienie zbioru liter przemiennych z daną literą – $[k]$ oznaczać będzie dalej zbiór liter przemiennych z k. To pojęcie wprowadził i zastosował Arnold Schmidt (1902–1967), a sprawę doprowadził do końca Friedrich Bachmann (1909–1982).

Nauka obcego języka

Wiemy już, co w geometrii płaszczyzny oznacza $kl = lk$, a co $Am = mA$. Aby zobaczyć, jak wygląda tak opisywana geometria, trzeba przejść przynajmniej krótkie samokształcenie w używaniu leibnizowskiego języka.

Proszę odpowiedzieć na pytanie, co oznaczają następujące napisy:

$$ab = bc, \quad ab = cd, \quad Ab = bC, \quad Ab = dC, \quad aB = Bc, \quad AB = BC.$$

Odpowiedzi znajdują się w numerze, ale proszę się postarać samodzielnie odczytać znaczenia. Wtedy stanie się jasne, że zmiana języka to poniekąd zmiana patrzenia na świat: to, co w uświęconym tradycją klasycznym szkolnym języku geometrii wyraża się prosto, tu może wyrażać się bardziej zawile, ale jest i odwrotnie – trudno formułowalne w języku klasycznym sytuacje po leibnizowsku niejednokrotnie będą bardzo proste.

Choćby taki fakt: słowo $a_1a_2\ldots a_{2n}$ daje się zawsze zastąpić słowem dwuliterowym i wynikający stąd natychmiast wniosek, że każde słowo ma odpowiednik co najwyżej trzyliterowy. Co to znaczy geometrycznie? I jak to udowodnić?

Okazuje się, że w tej sprawie kluczowy (i wystarczający) jest fakt:
jeśli $k, l, m \in [p]$ lub $k, l, m \in [P]$, to istnieje takie n, że $klm = n$.

Przesłanki powyższego zdania klasycznie brzmią: k, l, m *są współpękowe* (prawda?). Ale takie spojrzenie pozwala nam na naturalne uogólnienie, że zbiór liter nazwiemy pękiem, gdy każdy trzyliterowy napis złożony z liter należących do tego zbioru da się zastąpić napisem jednoliterowym. Proszę sprawdzić, że punkty przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru tworzą pęk (jak by to brzmiało klasycznie?).

Czasami tłumaczenie bywa twórcze. Na przykład zdanie, które orzeka, że dla dowolnych liter a, b, c zachodzi

$$abcabcbcabcacbacbcbacb = 1$$

pełni rolę tzw. słowa Banacha, czyli pozwala stwierdzić, że w grupie izometrii płaszczyzny euklidesowej nie istnieją podgrupy wolne, co m.in. wyklucza paradoksalny rozkład na płaszczyźnie. Oryginalne **słowo Banacha** to twierdzenie:
dla dowolnych izometrii płaszczyzny euklidesowej φ i ψ przekształcenie

$$\varphi^2\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^{-2}\psi^2\varphi^4\psi^{-2}\varphi^{-2}\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^2$$

jest identycznością.
Które sformułowanie jest prostsze?

Kolejny przykład to **twierdzenie Michela Chaslesa**:
każda izometria jest postaci ab lub aB,
co Chasles wyrażał w następujący sposób:
każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem
(równoważność obu sformułowań była już obecna w tekście tego artykułu).

Argumentem za tym, że pierwsze ze sformułowań jest bardziej nośne, może być fakt, iż Bachmann pod jego inspiracją stworzył odrębny dział teorii grup: **grupy biinwolutywne**, czyli takie, w których każdy z elementów jest inwolucją lub złożeniem dwu inwolucji. Do badania tego rodzaju obiektów może zachęcić spostrzeżenie, że
grupa izometrii przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru jest biinwolutywna,
czy jeszcze bardziej niespodziewane, że
biinwolutywna jest też grupa bijekcji dowolnego zbioru.

Czy odmienny punkt widzenia pozwala zobaczyć coś nowego

Podam przykład problemu łatwego w stylu leibnizowskim i trudnego w stylu klasycznym. Co więcej – klasycznie trudno było nawet wpaść na pomysł, że taka prawidłowość może mieć miejsce.

Rozwiązanie zadania M 1389.
Przyjmijmy oznaczenie $\overline{c_1\ldots c_n}$ dla $10^{n-1}c_1 + 10^{n-2}c_2 + \ldots + 10c_{n-1} + c_n$.
Zauważmy, że

$$a_1 = \overline{b_1b_2\ldots b_n}/10^n + \overline{b_1b_2\ldots b_n}/10^{2n} + \ldots = \overline{b_1b_2\ldots b_n}\sum_{k=1}^{\infty}(1/10^n)^k,$$

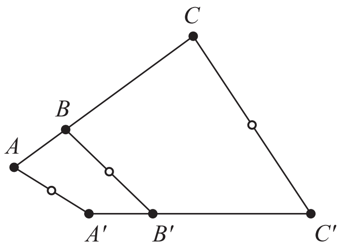
a stąd

$$9(a_1+\ldots+a_n) = 9(\overline{b_1b_2\ldots b_n} + \overline{b_2b_3\ldots b_1} + \ldots + \overline{b_nb_1\ldots b_{n-1}})\frac{1}{10^n-1} = 9(b_1+\ldots+b_n)\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1)\frac{1}{10^n-1} = b_1+\ldots+b_n.$$

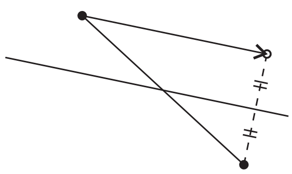
Rozwiązanie zadania M 1388.
Niech n_i oznacza liczbę wrogów i-tego rycerza, którzy zasiadają z nim przy stole. W kroku 0 posadźmy wszystkich rycerzy przy pierwszym stole. Będziemy w kolejnych krokach przesadzać rycerzy, rozważając liczbę

$$N = n_1 + \ldots + n_{44} \leqslant 3\cdot 44.$$

Jeśli po wykonaniu kroku przy pierwszym stole pewien rycerz siedzi wraz z przynajmniej dwoma swoimi wrogami, wykonujemy kolejny krok, w którym przesadzamy go do drugiego stołu. Zauważmy, że jeśli siedział on przy stole wraz z trzema wrogami, to N zmienia się na $N-6$. Jeśli zaś siedział on przy stole wraz z dwoma wrogami, to N zmienia się na liczbę niewiększą niż $N-2$. Skoro po wykonaniu każdego kroku N maleje, to wykonamy ich skończenie wiele. Oczywiście, po wykonaniu ostatniego kroku $n_i \leqslant 1$ dla każdego i, co kończy dowód.



Rys. 2


Rys. 3

Twierdzenie Hjelmsleva. *Jeśli ABC i $A'B'C'$ są przystającymi trójkami punktów współliniowych, to środki odcinków AA', BB' i CC' leżą na jednej prostej* (rys 2).

Dowód. Odcinek AC, a więc punkty A, B, C, można nałożyć na odcinek $A'C'$ dwiema izometriami: jedną z nich będzie obrót lub przesunięcie, a drugą symetria z poślizgiem. W symetrii z poślizgiem zaś środek każdej pary punkt-obraz leży na jej osi (rys. 3).

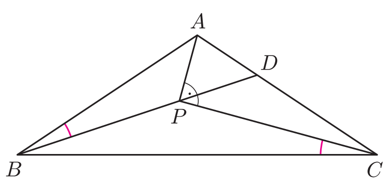
* * *

Pełny i zaawansowany wykład demonstrujący wykorzystanie tego języka można znaleźć w monografii Bachmanna *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegrieff*, Springer, 1959. Ale jest pytanie, czy ktoś normalny, a zatem niebędący zawodowym matematykiem, z tego języka korzysta. Okazuje się, że tak – program geometrii w szkołach niemieckich korzysta z tego języka. Możemy się o tym przekonać, zaglądając do wydanego przez Prószyńskiego poradnika pod nazwą *Atlas matematyki*, będącego tłumaczeniem szkolnego poradnika używanego w Niemczech – geometria w nim jest mocno odmienna od tej, jaką znamy ze szkoły.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1387. Na ramieniu AC trójkąta równoramiennego ABC o podstawie BC dany jest punkt D, przy czym $2AD = DC$. Na odcinku BD dany jest taki punkt P, że kąt APC jest prosty (rysunek). Udowodnić, że kąty PBA i PCB są równe.
Rozwiązanie na str. 5



M 1388. Król zaprosił na przyjęcie 44 rycerzy. Wiadomo, że każdy rycerz ma wśród pozostałych co najwyżej 3 wrogów (zakładamy, że jeśli rycerz Y jest wrogiem rycerza X, to i X jest wrogiem rycerza Y). Udowodnić, że można tak rozsadzić rycerzy przy dwóch stołach (dowolnie dużych), by każdy rycerz siedział przy stole z co najwyżej jednym ze swoich wrogów.
Rozwiązanie na str. 17

M 1389. Dana jest liczba wymierna $a_1 = 0{,}(b_1b_2\ldots b_n)$, w której zapisie dziesiętnym blok cyfr $b_1b_2\ldots b_n$ powtarza się okresowo po przecinku. Rozważmy liczby $a_2 = 0{,}(b_2b_3\ldots b_nb_1)$, $a_3 = 0{,}(b_3b_4\ldots b_nb_1b_2)$, …, $a_n = 0{,}(b_nb_1\ldots b_{n-1})$ powstałe z a_1 przez cykliczne przesunięcia cyfr w bloku. Udowodnić, że $b_1 + \ldots + b_n = 9(a_1 + \ldots + a_n)$.
Rozwiązanie na str. 17

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

F 833. Jaka będzie częstotliwość f dźwięku piszczałki wypełnionej helem, jeśli wypełniona powietrzem generuje dźwięk o częstotliwości $f_0 = 440$ Hz? Prędkość c dźwięku w gazie, w warunkach normalnych, z dobrym przybliżeniem opisuje zależność

$$c^2 = \frac{c_pRT}{c_V\mu},$$

gdzie c_p i c_V oznaczają odpowiednio ciepła właściwe gazu pod stałym ciśnieniem i w stałej objętości, $R = 8{,}314\ \mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$, T – temperaturę w skali Kelvina, a μ – masę jednego mola gazu. Powietrze jest mieszaniną azotu (78% objętości) i tlenu (21% objętości).
Rozwiązanie na str. 16

F 834. W celu pomiaru prędkości przepływu krwi wiązkę ultradźwięków o częstości 2,0 MHz skierowano na krew płynącą w tętnicy w kierunku źródła fali. Po zmieszaniu fali wychodzącej ze źródła z falą powracającą do umieszczonego obok niego mikrofonu, odbitą od czerwonych ciałek krwi, zaobserwowano dudnienia o częstości 389,6 Hz. Przyjmując, że prędkość ultradźwięku we krwi wynosi $v_u = 1540$ m/s, znaleźć prędkość przepływu krwi.
Rozwiązanie na str. 4