

O trzech grach na trzech stosach

Wiktor KUROPATWA*, Wojciech NADARA**

Czy garść kamieni usypanych w trzy stosy to wystarczająco dużo, by zapewnić dwóm osobom wyzwanie intelektualne? Okazuje się, że tak! W tym artykule, używając tych właśnie akcesoriów, stworzymy trzy gry, których analiza prowadzić będzie do ciekawych i w zadziwiający sposób powiązanych ze sobą wyników.

Pierwszą z gier jest znany ludzkości od wieków Nim. Gracze wykonują ruchy na przemian, zabierając z wybranego przez siebie stosu dowolną niezerową liczbę kamieni. Gra kończy się przegraną gracza, który nie może wykonać ruchu, czyli wtedy, gdy wszystkie stosy są puste. Gra Nim pojawiała się już wielokrotnie na łamach *Delty* (np. w numerze 7/2010), dlatego w tym artykule ograniczymy się jedynie do przypomnienia strategii wygrywającej w tej grze. Otóż jeśli przez a, b, c oznaczymy licznosci stosów w Nimie, to to, który z graczy wygra (o ile obaj grają optymalnie), zależy od wartości wyrażenia

$$a \oplus b \oplus c.$$

Dokładniej, pozycja w Nimie jest przegrana, gdy wartość powyższego wyrażenia jest równa zero – wówczas każdy ruch prowadzi do pozycji o dodatniej wartości wyrażenia, czyli do pozycji wygrywającej. Z kolei z każdej pozycji wygrywającej istnieje co najmniej jeden ruch do pozycji przegranej. Tak samo można zresztą opisać grę Nim na większej liczbie stosów.

Rozważmy pewną drobną modyfikację w zasadach Nima. Gracze nadal wykonują ruchy na przemian, zabierając dowolną niezerową liczbę kamieni z wybranego przez siebie stosu. Dodatkowo jednak, jeden raz w ciągu gry każdy z nich może wykonać ruch *specjalny*. Wykonując taki ruch, gracz może zabrać kamienie z dwóch stosów (można więc ruch specjalny rozumieć jako wykonanie dwóch ruchów „zwykłych” pod rząd). Przegrany, tak jak w zwykłym Nimie, gracz, który nie może wykonać ruchu. Nazwijmy tę zmodyfikowaną grę Nim 2.

Jak wygląda strategia dla gry Nim 2? Pierwszym kluczowym spostrzeżeniem jest to, iż nie opłaca się używać ruchu specjalnego, jeśli nie zakończy on gry. Spróbujmy to uzasadnić. Spójrzmy na sytuację gracza A, którego przeciwnik B wykonał jako pierwszy ruch specjalny. Jeżeli gra nie zakończyła się po ruchu gracza B, to możliwe są dwa przypadki. Gracz A mógł znaleźć się w pozycji wygrywającej w zwykłym Nimie – kontynuując wtedy rozgrywkę, nie wykorzystując ruchu specjalnego, a strategia dla zwykłego Nima zapewnia mu zwycięstwo. Jeżeli zaś po ruchu specjalnym przeciwnika gracz A znajdzie się w pozycji przegranej, wykorzystuje natychmiast swój ruch specjalny. Po wykonaniu pierwszego ze „zwykłych” ruchów na pewno znajdzie się w pozycji wygrywającej, a następnie, za pomocą drugiego ruchu, może pozostawić przeciwnika w pozycji przegranej. Dalej gracz A gra zgodnie ze strategią dla zwykłego Nima.

Oczywistym wnioskiem z powyższego spostrzeżenia jest fakt, iż ruchu specjalnego należy użyć dopiero wtedy, gdy w grze pozostaną tylko dwa stosy. Ruch taki prowadzi wtedy do natychmiastowego zwycięstwa. Tym samym gracz, który doprowadzi do opróżnienia któregoś ze stosów, przegra. Jediną sytuacją, w której opróżnienie stosu jest nieuniknione, jest ta, w której wszystkie trzy stosy mają licznosc równą jeden. Stąd gracze powinni grać tak, jakby grali w zwykłego Nima na stosach o jeden kamień mniejszych! W ten sposób gracz, który nie może wykonać ruchu na „mniejszych” stosach, będzie zmuszony opróżnić jeden z (rzeczywistych) stosów i przegra.

Opiszmy to nieco bardziej formalnie. Grając w Nim 2, będziemy jednocześnie wyobrażać sobie rozgrywkę w Nim na stosach o jeden mniejszych (nazwiemy tę grę Nim₋, patrz również rys. 1). Pokażemy, że jeśli mamy strategię wygrywającą w Nim₋, to mamy też strategię wygrywającą w Nim 2. Aby wykonać ruch w Nim 2, patrzymy, jaki ruch zrobilibyśmy w Nim₋, a następnie powtarzamy go w Nim 2. Z kolei gdy nasz przeciwnik rusza się w Nim 2, to jeśli wykonał ruch specjalny lub opróżnił jakiś stos – z dotychczas przeprowadzonego rozumowania wiemy, że przegrał. W przeciwnym przypadku powtarzamy jego ruch w grze Nim₋.

Prędzej czy później doprowadzimy przeciwnika do sytuacji w Nim₋, w której nie może wykonać ruchu, bo wszystkie stosy są puste. To odpowiada sytuacji w Nim 2, w której wszystkie stosy mają licznosc jeden, zatem nasz przeciwnik również tutaj przegrany.

Ostatecznie wynik w grze Nim 2 będzie zależał od wartości wyrażenia

$$(a - 1) \oplus (b - 1) \oplus (c - 1).$$



Symbol \oplus oznacza operację xor. Aby ją wyznaczyć, zapisujemy liczby binarnie, a następnie sumujemy metodą „szkolną”, ignorując przeniesienia.

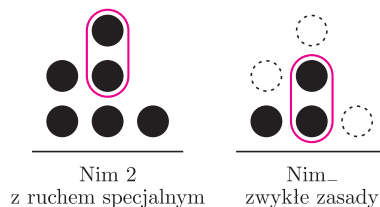


Rozwiązanie zadania F 834.

Krew możemy potraktować jako „poruszającego się obserwatora”, do którego, ze względu na zjawisko Dopplera, dochodzi fala o częstotliwości $f_k = f_0(v_u + v_k)/v_u$; f_0 jest częstotliwością źródła, a f_k – częstotliwością fali padającej na czerwone ciałka krwi, v_u – prędkością fali ultradźwiękowej, v_k – prędkością krwi.

Ponadto krew traktujemy jako źródło fali poruszające się w kierunku źródła ultradźwięków, a znajdujący się obok źródła mikrofon jako „nieruchomego obserwatora”, do którego dociera fala o częstotliwości $f_m = f_k v_u / (v_u - v_k)$, gdzie f_m – częstotliwość fali padającej na mikrofon.

Częstotliwość dudnień jest równa bezwzględnej wartości różnicy częstotliwości $f_d = |f_0 - f_m|$. Zatem $f_d = f_0 - f_0(v_u + v_k)/(v_u - v_k)$, stąd $v_k = f_d / (f_d - 2f_0)v_u$ i $v_k = 15 \text{ cm/s}$.



Rys. 1. Zabranie dwóch kamieni z drugiego stosu w grze Nim 2 i odpowiadający temu ruch w Nim₋.

*Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

**Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Co ciekawe, powyższe rozumowanie nie daje się uogólnić na większą liczbę stosów. Tym samym zachęcamy Czytelników do samodzielnych prób rozwiązania uogólnionej wersji gry Nim 2!

Przyjrzyjmy się teraz kolejnemu wariantowi gry Nim, który nazwiemy Nim 3. Tym razem modyfikacja jest taka, że po żadnym ruchu nie mogą powstać dwa stosy o równej liczbie kamieni (zakładamy, że na początku także wszystkie stosy były różne). Gra kończy się standardowo, gdy gracz nie może już wykonać żadnego ruchu, a zwycięża ten, który wykonał ostatni ruch. Przy czym w tej wersji sytuacją końcową jest moment, w którym stosy mają licznosc 0, 1 oraz 2.

Zastanówmy się, czy Nim 3 rzeczywiście różni się od Nima z punktu widzenia gracza, który w Nimie ma strategię wygrywającą. Przypomnijmy, że owa strategia wygrywająca w Nimie polega na zabraniu z pewnego stosu odpowiedniej liczby kamieni tak, aby xor licznosci stosów z niezerowego stał się zerowy. Gdybyśmy próbowali zastosować podobną strategię tutaj, to natknęlibyśmy się na przeszkodę. Istnieją konfiguracje, w których wszystkie takie ruchy prowadzą do wyrównania licznosci pewnych stosów. Są to dość charakterystyczne sytuacje, bo jeżeli $a \oplus b \oplus c = 0$ oraz, bez straty ogólnosci, $a = b$, to $c = 0$, czyli jeden ze stosów musi być pusty.

Skoro już zauważyliśmy, gdzie leży trudność w zastosowaniu standardowej taktyki, to może udałoby nam się wymyślić inną grę, w której strategia wygrywająca stałaby się bardziej jasna, a odpowiednim ruchom w niej odpowiadałyby pewne ruchy w Nim 3? Problemem, na który natknęliśmy się, stosując do gry Nim 3 strategię z Nima, było to, że gdy jeden stos stał się pusty, to ruchy, które chcielibyśmy wykonać, nagle stały się ruchami zakazanymi. Pomyślmy zatem, zamiast o Nim 3, o analogicznej grze, w której ruchem zakazanym jest także opróżnianie stosów. Zauważmy, że po dołożeniu takiego wygodnego założenia już z powodzeniem możemy zastosować standardową strategię wygrywającą dla gry Nim, gdyż ruch zerujący xora licznosci wszystkich stosów nigdy nie będzie prowadził do wyrównania licznosci pewnych stosów, bo jak już wcześniej zauważyliśmy, implikowałoby to, że pewien ze stosów jest pusty, a założyliśmy, że tak być nie może.

To, co nam pozostało, to sztucznie zasymulować założenie o tym, że ruch opróżniający stos jest ruchem zakazanym. Sytuacją końcową w takiej grze będzie układ, w którym stosy będą miały licznosci 1, 2, 3. Nasuwa się zatem pomysł, aby do każdego stosu w Nim 3 dodać po jednym wirtualnym kamieniu, którego żaden z graczy nie może zabrać. Zauważmy, że wtedy zarówno nie będzie możliwe opróżnienie stosu, bo gracz nie może zabrać wirtualnego kamienia, jak i sytuacje końcowe będą się zgadzały, bo w grze Nim 3 bez tego założenia sytuacja końcowa miała postać 0, 1, 2. Zatem już prawie osiągnęliśmy cel – mianowicie sprowadziliśmy Nima 3 do gry, w której będziemy mogli już stosować standardową taktykę znaną z Nima. Pozostaje nam jedynie formalnie udowodnić, że powyższe sprowadzenie jest rzeczywiście poprawne.

Stosujemy rozumowanie podobne jak poprzednio i, grając w Nim 3, wyobrażamy sobie rozgrywkę w grę Nim₊, czyli w zwykłego Nima ze stosami zwiększonymi o jeden kamień (rys. 2). Zakładamy, że mamy strategię wygrywającą w Nim₊, i chcemy wykazać, że mamy także strategię wygrywającą w Nim 3. Tym razem każdy ruch przeciwnika w Nim 3 możemy powtórzyć w grze Nim₊. Z kolei, aby wykonać nasz ruch w Nim 3, patrzmy na nasz ruch w Nim₊. Ruch ten prowadzi nas do sytuacji, w której xor licznosci stosów jest zerowy. Gdyby to była sytuacja, w której opróżniliśmy jeden ze stosów, to dwa pozostałe musiałyby być równe, co nie jest możliwe, gdyż w takiej sytuacji byłyby też równe na początku (co jest niezgodne z zasadami Nim 3). Zatem nasz ruch w Nim₊ na pewno nie opróżni żadnego stosu, czyli jest on poprawnym ruchem w Nim 3 i możemy go tam powtórzyć.

Zauważmy, że przez całą grę w Nim₊ na planszy będą stosy różnej licznosci, więc w końcu doprowadzimy przeciwnika do sytuacji 1, 2, 3, co odpowiada jego przegranej w grze Nim 3 z sytuacją 0, 1, 2.

Stąd wniosek, że gracz ma w grze Nim 3 strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy ma on strategię wygrywającą w analogicznej konfiguracji Nima z dołożonymi wirtualnymi kamieniami – po jednym do każdego stosu, czyli wynik gry zależy od wartości wyrażenia

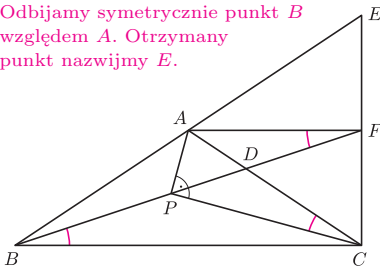
$$(a + 1) \oplus (b + 1) \oplus (c + 1).$$

Kwestię uogólnienia gry Nim 3 na wiele stosów zostawiamy do rozważenia Czytelnikom.

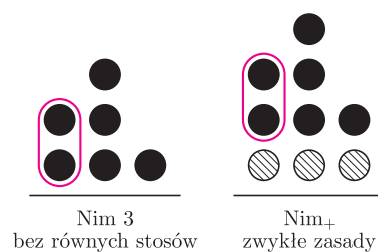
Pewien szczególny przypadek gry Nim 3 został rozpatrzony w tekście „O Olimpijskim Kółku Matematycznym” w *Delcie* 10/2011 – w tamtym artykule wysokości stosów były trzema kolejnymi liczbami naturalnymi.



Rozwiązanie zadania M 1387.
Odbijamy symetrycznie punkt B względem A . Otrzymany punkt nazwijmy E .



Odcinek CA jest środkową trójkąta BCE , a ponieważ $CD : CA = 2/3$, więc D jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Niech F oznacza środek boku CE . Leży on na przedłużeniu odcinka BD . Ponieważ $EA = AB = AC$, więc kąt BCE jest prosty, a zatem również kąt AFC jest prosty. Stąd punkty A, P, C, F leżą na okręgu o średnicy AC . Wobec tego $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PFA$. Ale $AF \parallel BC$, więc $\sphericalangle PFA = \sphericalangle DBC = \sphericalangle PBC$.



Rys. 2. Odpowiadające sobie ruchy w grach Nim 3 i Nim₊.