Łańcuch sfer

Joanna JASZUŃSKA

Tematem poprzedniego *deltoidu* była inwersja na płaszczyźnie. Analogicznie przekształcenie zdefiniować można w przestrzeni: *obrazem punktu $A \neq S$ w inwersji względem sfery o środku S i promieniu r jest taki punkt A^* na półprostej $SA^{\rightarrow}$, że $SA \cdot SA^* = r^2$*. Na marginesie podano niektóre własności inwersji w przestrzeni.

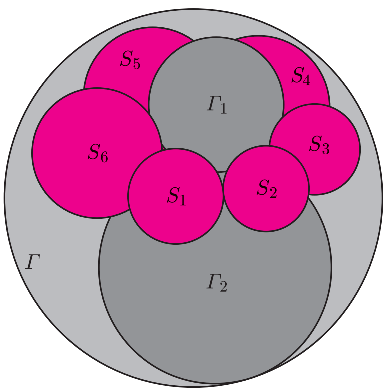
Niektóre własności inwersji:

- obrazem punktu A^* jest punkt A,
- obrazem sfery przechodzącej przez punkt S jest płaszczyzna nieprzechodząca przez S (i na odwrót),
- obrazem sfery nieprzechodzącej przez S jest sfera nieprzechodząca przez S,
- obrazem okręgu nieprzechodzącego przez S jest okrąg nieprzechodzący przez S.

Punkt S nazywa się *środkiem inwersji*. Nie definiujemy jego obrazu S^*.

Więcej o inwersji przestrzennej znaleźć można w *Delcie* 12/2012.

Zadanie 1. Styczne zewnętrznie sfery Γ_1 i Γ_2 są styczne wewnętrznie do sfery Γ (rys. 1). Do każdej z tych trzech sfer styczna jest każda z n sfer $S_1, S_2, \ldots, S_n$, ponadto dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sfera S_i styczna jest do sfery S_{i+1} (przy czym $S_{n+1} = S_1$). Dla jakich n istnieje taki łańcuch sfer S_i? W jaki sposób zależy to od rozmiarów i wzajemnego położenia sfer $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$? Czy i jak zależy to od wyboru początkowej sfery S_1?

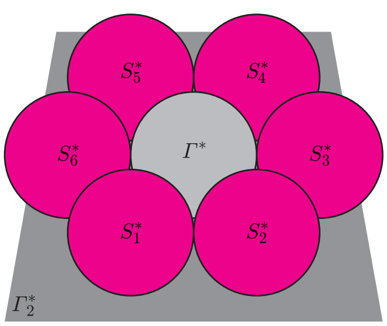


Rys. 1. Szare sfery są parami styczne i każda z nich styczna jest do każdej z kolorowych sfer, tworzących łańcuch.

Rozwiązanie. Zastosujmy inwersję względem dowolnej sfery o środku w punkcie styczności sfer Γ_1 i Γ_2. Wówczas obrazami tych dwóch sfer, przechodzących przez środek inwersji, są płaszczyzny Γ_1^* i Γ_2^*. Płaszczyzny te są równoległe, bo jedynym wspólnym punktem sfer Γ_1 i Γ_2 jest środek inwersji.

Obrazem każdej z pozostałych sfer $\Gamma, S_1, S_2, \ldots, S_n$ jest sfera (bo żadna z nich nie przechodzi przez środek inwersji) styczna do Γ_1^* i Γ_2^*. Z równoległości tych płaszczyzn wynika, że wszystkie sfery $\Gamma^*, S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*$ mają średnice równe odległości Γ_1^* od Γ_2^*, czyli są przystające. Ponadto wszystkie sfery $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*$ są styczne do sfery Γ^* oraz dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sfera S_i^* styczna jest do sfery S_{i+1}^* (przy czym $S_{n+1}^* = S_1^*$). Odpowiada to sytuacji, gdy na stole (płaszczyźnie Γ_2^*) ustawiamy piłeczki, przy czym łańcuch kolejno stycznych piłeczek S_i^* otacza środkową piłeczkę Γ^*, stykając się także z nią (rys. 2). Skoro wszystkie piłeczki są tej samej wielkości, to taki łańcuch „domyka" się wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 6$.

Stąd również w wyjściowej sytuacji (przed inwersją) łańcuch sfer S_i ma zawsze dokładnie sześć elementów i nie zależy to od rozmiarów ani położenia sfer $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, ani też od wyboru sfery S_1. Taki łańcuch sfer nazywa się *Hexletem Soddy'ego*. □



Rys. 2. Identyczne piłeczki na stole. Nie narysowano płaszczyzny Γ_1^*, równoległej do Γ_2^* i stycznej do sfer od góry.

Uwaga. Dzięki zastosowaniu inwersji, z wyjściowego układu sfer, zazwyczaj niesymetrycznego, uzyskujemy sytuację idealnie symetryczną: równoległe płaszczyzny, identyczne sfery w eleganckim układzie sześciu otaczających siódmą... Pozostaje pytanie, gdzie po inwersji „ukryła się" cała asymetria wyjściowej sytuacji? Otóż jest ona „zakodowana" w położeniu środka inwersji wewnątrz sfery Γ^*.

Wnioski. Po inwersji punkty styczności sfer S_i^* leżą na jednym okręgu. Nie przechodzi on przez środek inwersji (bo środek ten jest wewnątrz sfery Γ^*), stąd także w wyjściowej sytuacji punkty styczności sfer S_i leżą na jednym okręgu.

Dla każdej z płaszczyzn Γ_1^*, Γ_2^*, a także dla sfery Γ^*, po inwersji punkty styczności ze sferami S_i^* leżą na jednym okręgu. Stąd także przed inwersją dla każdej ze sfer $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ jej punkty styczności ze sferami S_i są na jednym okręgu.

Po inwersji istnieją dwie sfery przechodzące przez środek inwersji oraz styczne do wszystkich sfer S_i^*. Można bowiem wyobrazić sobie, że sfera Γ^* to balonik, który nadmuchujemy tak, by cały czas nadal był styczny do wszystkich sfer S_i^*. W miarę jak rośnie, „wypychamy" go do góry lub do dołu. W każdym z tych dwóch wariantów istnieje dokładnie jedno położenie, przy którym nasz balonik przechodzi przez środek inwersji. Każda z takich dwóch sfer odpowiada wobec tego, w wyjściowej sytuacji, płaszczyźnie i nadal jest styczna do wszystkich sfer S_i. Istnieją zatem takie dwie płaszczyzny styczne do wszystkich sfer S_i z góry i z dołu. Ponadto, środki sfer S_i leżą wobec tego na jednej płaszczyźnie – dwusiecznej kąta dwuściennego utworzonego przez te dwie płaszczyzny styczne do sfer.

Zadanie 2. Na płaszczyźnie dane są rozłączne wewnętrznie okręgi Γ_1 i Γ_2. Do każdego z nich styczny jest każdy z n okręgów $S_1, S_2, \ldots, S_n$, ponadto dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ okrąg S_i styczny jest do okręgu S_{i+1} (przy czym $S_{n+1} = S_1$). Dla jakich n istnieje taki łańcuch okręgów S_i? W jaki sposób zależy to od rozmiarów i wzajemnego położenia okręgów Γ_1 i Γ_2? Czy i jak zależy to od wyboru początkowego okręgu S_1?

Taki łańcuch okręgów nazywa się *Łańcuchem Steinera*.

Wskazówka. Dla dowolnych dwóch okręgów rozłącznych na płaszczyźnie istnieje inwersja przeprowadzająca je na okręgi współśrodkowe.