Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 649 ($WT = 1{,}03$) i 650 ($WT = 2{,}51$) z numeru 11/2012

Janusz Olszewski	Warszawa	45,43
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Wojciech Nadara	Warszawa	40,67
Paweł Łabędzki	Kielce	37,95
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Witold Bednarek	Łódź	36,54
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	33,44

Kto ciekawy, ile to jest 14 razy 44, niech wie: 616. I do tego trzeba oczywiście doliczyć bieżącą nadwyżkę w wysokości 1,43 punktu. No, panie Januszu – tak dalej!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 663, 664

Redaguje Marcin E. KUCZMA

663. Czy istnieje nieskończony, ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $k_0, k_1, k_2, \ldots$ taki, że dla każdego $i \geqslant 0$ iloczyn $k_{3i}k_{3i+1}k_{3i+2}$ jest podzielny przez każdą z liczb $k_{3i}+1$, $k_{3i+1}+1$, $k_{3i+2}+1$?

664. Dowieść, że jeśli liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^2 - x\lfloor x\rfloor - 1 = 0$, to każda potęga liczby x o wykładniku dodatnim nieparzystym także spełnia to równanie.

Zadanie 664 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

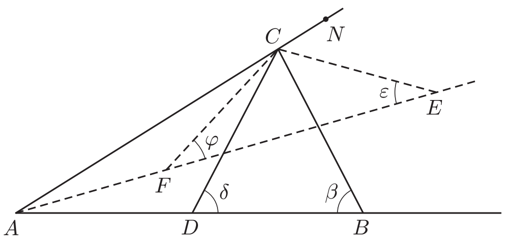
Rozwiązania zadań z numeru 2/2013

Przypominamy treść zadań:

655. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC oraz przedłużeń boków AB, AC. Punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD. Dowieść, że jeżeli trójkąt CEF jest równoramienny, to także trójkąt CBD jest równoramienny.

656. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Niech M_n będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny składa się z n dziewiątek: $M_n = 99\ldots9 = 10^n - 1$. Znaleźć najmniejszą jej wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym cyfra 9 nie występuje.

655. Oznaczmy miary kątów trójkąta BCD przy wierzchołkach B i D przez β i δ, a miary kątów trójkąta CEF przy wierzchołkach E i F przez ε i φ.



Kąty φ i δ, jako kąty zewnętrzne trójkątów CAF i CAD, są związane zależnością

$$\varphi = |\sphericalangle FAC| + |\sphericalangle FCA| = \frac{|\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle DCA|}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Niech N będzie dowolnym punktem na przedłużeniu boku AC poza wierzchołek C. Kąty ECN i BCN, jako kąty zewnętrzne trójkątów ECA i BCA, wyrażają się jako sumy: $|\sphericalangle ECN| = \varepsilon + |\sphericalangle EAC|$, $|\sphericalangle BCN| = \beta + |\sphericalangle BAC|$. Tak więc

$$\varepsilon = |\sphericalangle ECN| - |\sphericalangle EAC| = \frac{|\sphericalangle BCN| - |\sphericalangle BAC|}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Stąd $|\sphericalangle ECF| = 180^\circ - (\varepsilon + \varphi) = 180^\circ - (\beta+\delta)/2 > 90^\circ$. Zatem jeśli trójkąt CEF, z kątem rozwartym przy wierzchołku C, jest równoramienny, to $\varepsilon = \varphi$. Z uzyskanych wcześniej równości dostajemy wówczas $\beta = \delta$, czyli równoramienność trójkąta CBD.

656. Eksperymenty z niewielkimi wartościami n pozwalają zgadnąć, że szukaną wielokrotnością liczby M_n jest iloczyn $K_n \cdot M_n$, gdzie

$$K_n = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}2 = \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10^n + 8}{9}.$$

Rzeczywiście, iloczyn $K_n \cdot M_n$ nie ma dziewiątki w zapisie dziesiętnym:

$$K_n \cdot M_n = \frac{10^n + 8}{9} \cdot (10^n - 1) = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n}.$$

Należy teraz wykazać, że dziewiątka występuje w każdym z iloczynów $H \cdot M_n$, gdy $H = 1, 2, \ldots, K_n - 1$.

Niech H będzie liczbą t-cyfrową: $10^{t-1} \leqslant H < 10^t$; $t \leqslant n$. Bierzemy iloczyn $H \cdot M_n$, skreślamy jego końcowe t cyfr i dostajemy liczbę

$$\left\lfloor \frac{H \cdot M_n}{10^t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{H \cdot (10^n - 1)}{10^t} \right\rfloor = \left\lfloor H \cdot 10^{n-t} - \frac{H}{10^t} \right\rfloor = = H \cdot 10^{n-t} - 1.$$

Jeżeli $t < n$, uzyskana liczba ma dziewiątkę na końcu; również wtedy, gdy $t = n$, zaś H kończy się zerem. To znaczy, że w tych przypadkach iloczyn $H \cdot M_n$ ma dziewiątkę w rzędzie 10^t.

Pamiętając, że rozważamy $H < K_n$, pozostaje rozpatrzeć sytuacje, gdy $t = n$, przy czym albo $H = K_n - 1 = 11\ldots1$ (wówczas $H \cdot M_n$ ma dziewiątkę na końcu), albo H ma w zapisie dziesiętnym co najmniej jedno zero, ale nie na pozycji końcowej. Ma więc postać $H = A0B$, gdzie zero rozdziela dwie niepuste grupy cyfr. Przyjmijmy, że B jest grupą k-cyfrową; oczywiście $k < n$. W myśl rozpatrzonego już przypadku, iloczyn $B \cdot M_n$ ma dziewiątkę w rzędzie 10^k, czyli właśnie na tej pozycji, na której H ma zero. Ta dziewiątka pozostanie obecna w iloczynie $H \cdot M_n$.

Zatem, istotnie, $K_n \cdot M_n$ jest najmniejszą wielokrotnością liczby M_n bez dziewiątki w zapisie dziesiętnym.

Klub 44

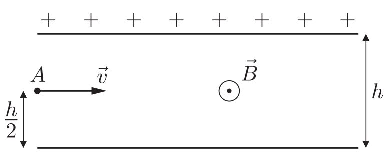
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2013

Zadania z fizyki nr 560, 561

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

560. Jeżeli w pewnym inercjalnym układzie odniesienia istnieje tylko pole elektryczne $\vec{E}$, to w układzie poruszającym się z prędkością $\vec{v}$ względem układu pierwotnego, gdy możemy zaniedbać efekty relatywistyczne, istnieje również pole magnetyczne $\vec{B'} = -(\vec{v} \times \vec{E})/c^2$, gdzie c jest prędkością światła. Sprawdź prawdziwość tego stwierdzenia na przykładzie pola od ładunku punktowego, rozważanego w obu układach.

561. Kondensator płaski umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (rys. 1). Napięcie między okładkami kondensatora wynosi U, odległość między okładkami h. Z punktu A wylatuje elektron prostopadle do linii pola magnetycznego. Jaki warunek musi spełniać prędkość elektronu, żeby przeleciał on przez kondensator bez kontaktu z jego okładkami? Siły ciężkości nie uwzględniamy, efekty relatywistyczne możemy zaniedbać.

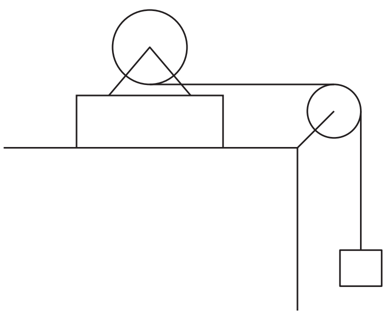


Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 2/2013

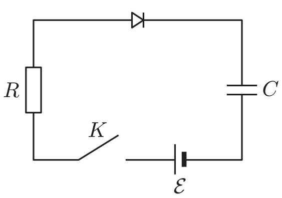
Przypominamy treść zadań:

552. Do podstawki leżącej na stole przymocowany jest pełny walec o promieniu R, który może swobodnie obracać się wokół własnej osi. Do końca nici nawiniętej na walec i przerzuconej przez nieruchomy bloczek, jak na rysunku 2, przymocowano ciężarek. Masy podstawki, walca i ciężarka są jednakowe. Ile obrotów wykona walec w czasie t? W chwili początkowej układ spoczywa. Tarcie można zaniedbać.

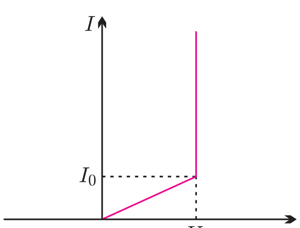


Rys. 2

553. Ile ciepła wydzieli się na oporze R w obwodzie przedstawionym na rysunku 3(a) po zamknięciu klucza? W chwili początkowej kondensator o pojemności C nie jest naładowany. Siła elektromotoryczna źródła prądu wynosi $\mathcal{E}$, opór wewnętrzny źródła jest zaniedbywalny. Wyidealizowana charakterystyka prądowo-napięciowa diody przedstawiona jest na rysunku 3(b).



Rys. 3(a)



Rys. 3(b)

552. Oznaczmy masy ciężarka, podstawki i walca przez m. Równanie ruchu ciężarka ma postać $ma = mg - N$, gdzie a jest jego przyspieszeniem, a N siłą naprężenia nici. N jest jedyną siłą działającą w kierunku poziomym na układ podstawki i walca, zatem oznaczając przez a_1 przyspieszenie ruchu postępowego tego układu, możemy napisać: $2ma_1 = N$. Moment bezwładności pełnego walca względem jego osi wynosi $I = mR^2/2$, a równanie ruchu obrotowego względem tej osi ma postać $I\epsilon = NR$, gdzie ϵ jest przyspieszeniem kątowym. Przyspieszenie względem Ziemi najniżej położonego punktu walca równe jest przyspieszeniu ciężarka, mamy więc związek $a = a_1 + \epsilon R$. Eliminując z wypisanych równań przyspieszenia liniowe oraz naprężenie nici, otrzymujemy wzór na przyspieszenie kątowe walca: $\epsilon = \dfrac{4g}{7R}$. Droga kątowa walca wynosi $\alpha = \epsilon t^2/2$, zatem szukana liczba obrotów to $n = \dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{gt^2}{7\pi r}$.

553. Załóżmy, że natężenie prądu w obwodzie po zamknięciu klucza jest większe od I_0, czyli spełniony jest warunek $(\epsilon - U_0)/R > I_0$. Podczas ładowania kondensatora natężenie prądu maleje i w pewnym czasie t_1, dopóki nie osiągnie wartości I_0, napięcie na diodzie ma stałą wartość U_0. Ładunek, którym naładuje się w tym czasie kondensator, wynosi $Q_1 = c(\epsilon - RI_0 - U_0)$. Zgodnie z zasadą zachowania energii: $\epsilon Q_1 = U_0 + \dfrac{Q_1^2}{2c} + W_{1R}$, gdzie W_{1R} jest ciepłem wydzielonym na oporze R w czasie t_1. W czasie t_2, gdy natężenie prądu w obwodzie jest mniejsze niż I_0 i maleje do zera, napięcie na diodzie maleje liniowo z natężeniem prądu, czyli jej opór $r = U_0/I_0$ jest stały. Ładunek, który przepływa w tym czasie w obwodzie, wynosi $\Delta Q = Q_2 - Q_1$, gdzie końcowy ładunek na kondensatorze to $Q_2 = c\epsilon$. Energia wydzielona w tym czasie w obwodzie równa jest pracy źródła i wynosi $\epsilon \Delta Q = \dfrac{Q_2^2}{2c} - \dfrac{Q_1^2}{2c} + W_{2R} + W_r$, gdzie w_r jest ciepłem wydzielonym na diodzie, a w_{2R} ciepłem wydzielonym na oporze R w czasie t_2. Ponieważ dioda i opornik są połączone szeregowo i w każdej chwili płynie przez nie prąd o tym samym natężeniu, zachodzi związek $W_{2R}/W_r = R/r$. Całkowite ciepło wydzielone na oporze R w czasie $t_1 + t_2$ wynosi

$$W_{1R} + W_{2R} = \frac{1}{2}\left(c\left((\epsilon - U_0)^2 - (I_0R)^2\right) + \frac{Rc}{R+r}(U_0 + I_0R)^2\right).$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 546 ($WT = 1{,}77$), 547 ($WT = 2{,}46$) 548 ($WT = 2{,}09$) i 549 ($WT = 1$) z numerów 11 i 12/2012

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	43,27
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,35
Tomasz Rudny	Warszawa	35,20
Krzysztof Magiera	Łosiów	32,79
Andrzej Idzik	Bolesławiec	31,81