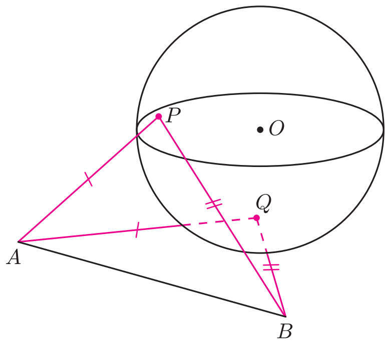
Kącik przestrzenny (18): O pożytku ze sfery wpisanej

W tym kąciku chcielibyśmy powrócić do pewnych własności sfery wpisanej w czworościan, o których pisaliśmy w kąciku 2 o najmocniejszym twierdzeniu stereometrii (*Delta* 3/2010). Okazuje się, że można je wykorzystać do udowodnienia faktów pozornie niezwiązanych ze sferą wpisaną.

Przypomnijmy więc główne twierdzenie:



Rys. 1

Twierdzenie 1. *Dana jest sfera o i punkty A i B takie, że prosta AB jest rozłączna ze sferą o. Prowadzimy dwie płaszczyzny przechodzące przez punkty A i B styczne do sfery o w punktach P i Q (rys. 1). Wówczas trójkąty APB i AQB są przystające.*

W kąciku 8 (*Delta* 6/2011) udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. *W dowolnym czworościanie $ABCD$ zachodzi nierówność*

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC > \sphericalangle ADC.$$

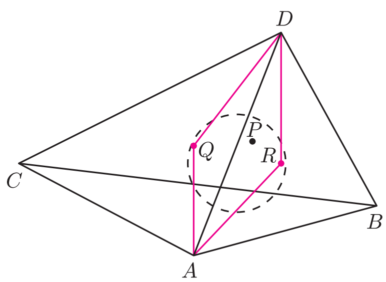
Teraz zaprezentujemy inny dowód, wykorzystujący własności sfery wpisanej.

Dowód. Niech P, Q, R będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami BCD, CAD, ABD (rys. 2). Na mocy twierdzenia 1 trójkąty ADQ i ADR są przystające, skąd $\sphericalangle ADQ = \sphericalangle ADR = \alpha$. Analogicznie dostajemy

$$\sphericalangle BDR = \sphericalangle BDP = \beta \quad \text{i} \quad \sphericalangle CDP = \sphericalangle CDQ = \gamma.$$

Wystarczy jeszcze zauważyć, że

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \alpha + 2\beta + \gamma > \alpha + \gamma = \sphericalangle ADC.$$

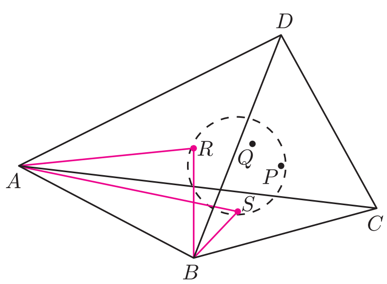


Rys. 2

Ta metoda nie wymaga rozważenia oddzielnie dwóch przypadków, jak dowód przeprowadzony w kąciku 8. Czytelnika Odważnego zaś zainteresuje fakt, że można w ten sposób udowodnić odpowiedniki twierdzenia 2 w wyższych wymiarach. Podobnie można uzasadnić inne ciekawe twierdzenie dotyczące czworościanu.

Twierdzenie 3. *W dowolnym czworościanie pole każdej ściany jest mniejsze od sumy pól trzech pozostałych ścian.*

Twierdzenie to jest odpowiednikiem nierówności trójkąta dla czworościanu. Zazwyczaj dowodzi się go poprzez zrzutowanie jednego z wierzchołków na płaszczyznę zawierającą przeciwległą ścianę i wykorzystanie faktu, że pole rzutu ściany nie przekracza pola ściany. Wykorzystanie najmocniejszego twierdzenia stereometrii pozwala przedstawić znacznie prostsze i zgrabniejsze uzasadnienie.



Rys. 3

Dowód. Należy wykazać, że w czworościanie $ABCD$ pole ściany ABC jest mniejsze od sumy pól trzech pozostałych ścian. Oznaczmy przez P, Q, R, S punkty styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami BCD, CDA, DAB, ABC (rys. 3). Z twierdzenia 1 wynika, że trójkąty ABS i ABR są przystające, a więc mają równe pola. Podobnie dowodzimy równości pól

$$[BCS] = [BCP] \quad \text{oraz} \quad [ACS] = [ACQ].$$

Ponieważ punkty P, Q, R leżą wewnątrz ścian czworościanu, to zachodzą nierówności

$$[ABR] < [ABD], \qquad [BCP] < [BCD], \qquad [ACQ] < [ACD].$$

Zatem

$$[ABC] = [ABS] + [BCS] + [ACS] = [ABR] + [BCP] + [ACQ] < \\ < [ABD] + [BCD] + [ACD].$$

Na koniec jedno zadanie dla Czytelników.

Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Ponadto suma pól ścian ABC i ABD jest równa sumie pól ścian BCD i ACD. Dowieść, że $AC = BD$ lub $AD = BC$.

Michał KIEZA

Tłumaczenia z leibnizowskiego na klasyczny.

$ab = bc$	b jest dwusieczną kąta ac, lub gdy są równoległe, ich linią środkową
$ab = cd$	proste a, b, c, d mają wspólny punkt (kierunek) i ab wyznaczają ten sam kąt (wektor), co cd
$Ab = bC$	gdy $A \neq C$, prosta b jest symetralną AC, a gdy $A = C$, dowolną prostą przechodzącą przez A
$Ab = dC$	A, C są na wspólnej prostopadłej prostych b, d, oba między tymi prostymi lub oba na zewnątrz; A w tej samej odległości od b, co C od d
$aB = Bc$	proste są równoległe i gdy $a \neq c$, punkt B leży na ich linii środkowej, a gdy $a = c$, leży na a
$AB = BC$	B jest środkiem AC