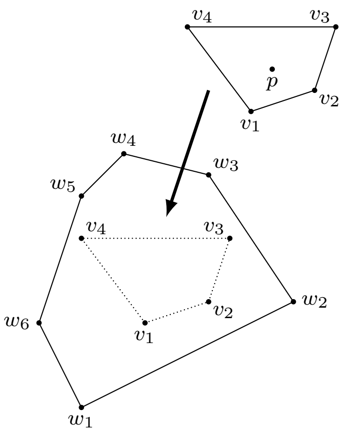
Zawieramy wielokąty

Tomasz IDZIASZEK

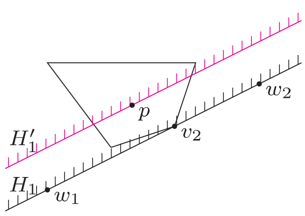
Na poprzedniej stronie podano trzy wersje problemu PolygonContainment, które są uważane za trudne – nie umiemy ich rozwiązać w czasie (istotnie) lepszym niż kwadratowy. Uważni Czytelnicy na pewno zauważyli, że nie jest tam wspomniane o wersji, w której wielokąty są wypukłe i dopuszczamy dowolne przesunięcia (ale nie obroty). Ten brak jest w pełni uzasadniony, gdyż tę wersję problemu można rozwiązać w czasie liniowym względem liczby wierzchołków wielokątów, co pokażemy poniżej.



Rys. 1. Wielokąt $P = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ można umieścić wewnątrz wielokąta $Q = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$.

Niech P będzie wielokątem o wierzchołkach $v_1, \ldots, v_n$, który chcemy umieścić wewnątrz wielokąta Q o wierzchołkach $w_1, \ldots, w_m$ (przyjmujemy, że $v_{n+1} = v_1$ i $w_{m+1} = w_1$). Niech p będzie dowolnym punktem wewnątrz wielokąta P (rys. 1). Załóżmy dla uproszczenia, że żadna para boków wielokątów nie jest równoległa oraz żaden bok nie jest pionowy.

Przez H_i (dla $1 \leqslant i \leqslant m$) oznaczmy tę półpłaszczyznę wyznaczoną przez prostą $w_i w_{i+1}$, która zawiera wielokąt Q. Przesuńmy teraz wielokąt P tak, aby zawierał się w H_i i aby odległość punktu p od prostej $w_i w_{i+1}$ była jak najmniejsza; oznaczmy tę odległość przez d_i. Zauważmy, że d_i możemy obliczyć bez kłopotu, jeśli wyznaczymy wierzchołek przesuniętego wielokąta P, który leży na brzegu półpłaszczyzny H_i; nazwiemy ten wierzchołek *krytycznym dla boku* $w_i w_{i+1}$ (rys. 2).

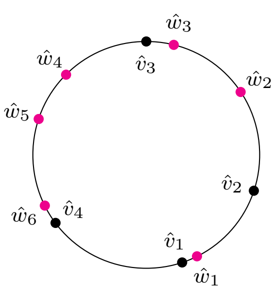


Rys. 2. Wierzchołek v_2 jest wierzchołkiem krytycznym dla boku $w_1 w_2$.

Zauważmy, że wielokąt P zawiera się w H_i dokładnie wtedy, gdy punkt p zawiera się w półpłaszczyźnie H_i', która jest wyznaczona przez prostą równoległą do $w_i w_{i+1}$ w odległości d_i. Jest jasne, że P znajduje się wewnątrz Q dokładnie wtedy, gdy znajduje się w każdej z półpłaszczyzn H_i, innymi słowy wtedy, gdy punkt p należy do przecięcia półpłaszczyzn H_i'. Co więcej, przecięcie półpłaszczyzn zawiera wszystkie możliwe położenia punktu p.

Do pełnego rozwiązania pozostaje zatem pokazanie, jak efektywnie wyznaczyć wierzchołki krytyczne, a następnie przecięcie półpłaszczyzn.

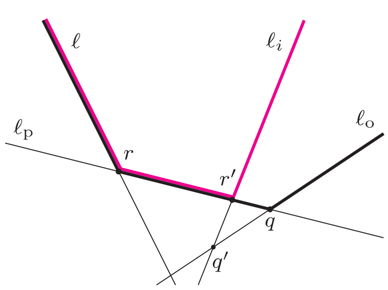
Wyznaczanie wierzchołków krytycznych. Narysujmy okrąg i zaznaczmy na nim, dla $j = 1, \ldots, n$, punkt styczności $\hat{v}_j$ prostej stycznej do okręgu i równoległej do prostej $v_j v_{j+1}$. Analogicznie zaznaczamy punkt $\hat{w}_i$ dla prostej $w_i w_{i+1}$ (rys. 3). Zauważmy, że wierzchołek v_j jest krytyczny dla boku $w_i w_{i+1}$, jeśli na okręgu punkt $\hat{w}_i$ leży pomiędzy punktami $\hat{v}_{j-1}$ oraz $\hat{v}_j$. Wystarczy zatem wyznaczyć kolejność punktów na okręgu – to można zrobić w czasie $O(n + m)$, gdyż należy scalić dwa posortowane ciągi punktów (zakładamy przy tym, że znamy kolejność wierzchołków na obwodach wielokątów).



Rys. 3. Nachylenia boków wielokątów naniesione na okrąg.

Na ten problem można spojrzeć też inaczej. Wyobraźmy sobie dwie proste równoległe, które jednocześnie obracają się wokół wielokątów, będąc do nich stycznymi. Ilekroć prosta styczna do Q zawiera pewien jego bok, to prosta styczna do P przechodzi przez wierzchołek krytyczny dla tego boku. Pozostawiamy Czytelnikowi zaimplementowanie tego pomysłu, tak by działał w czasie $O(n + m)$. Metoda prostych równoległych pozwala rozwiązać wiele problemów dotyczących wielokątów wypukłych – zainteresowani Czytelnicy więcej szczegółów mogą znaleźć w Internecie pod hasłem *rotating calipers*.

Wyznaczanie przecięcia półpłaszczyzn. W ogólności problem ten dla m półpłaszczyzn wymaga czasu $O(m \log m)$, ale my znowu skorzystamy z tego, że znamy kolejność wierzchołków w wielokącie Q, zatem nasze półpłaszczyzny H_i' są posortowane według współczynników kierunkowych ich brzegów (prostych ℓ_i), co pozwala nam rozwiązać ten problem w czasie $O(m)$.



Rys. 4. Rozpatrujemy prostą ℓ_i, na stosie znajdują się proste $\ell, \ell_{\mathrm{p}}, \ell_{\mathrm{o}}$. Punkt $q = \ell_{\mathrm{p}} \cap \ell_{\mathrm{o}}$ znajduje się na prawo od punktu $q' = \ell_{\mathrm{o}} \cap \ell_i$, zatem usuwamy ze stosu prostą ℓ_{o}. Punkt r jest na lewo od r', zatem na stosie pozostaną proste $\ell, \ell_{\mathrm{p}}, \ell_i$.

Najpierw pokażemy, jak wyznaczyć „dolne” przecięcie, tzn. dla półpłaszczyzn, które mogą stanowić dolny brzeg wielokąta będącego przecięciem. Przeglądamy półpłaszczyzny w kolejności rosnących współczynników kierunkowych prostych ℓ_i. Będziemy utrzymywać następujący niezmiennik: po rozpatrzeniu prostej ℓ_i na stosie znajdują się te proste z ciągu $\ell_1, \ldots, \ell_i$, które mają nietrywialne przecięcie z brzegiem zbioru $H_1' \cap \ldots \cap H_i'$. Rozpatrując ℓ_i, robimy co następuje: dopóki punkt przecięcia prostych ℓ_{p} i ℓ_{o} (przedostatniej i ostatniej prostej na stosie) znajduje się na prawo od punktu przecięcia prostych ℓ_{o} i ℓ_i, usuwamy ostatnią prostą ze stosu. Na końcu dodajemy prostą ℓ_i na stos (patrz rys. 4).

Analogicznie wyznaczamy przecięcie „górnych” półpłaszczyzn. Obliczenie przecięcia powstałych zbiorów w czasie $O(m)$ pozostawimy jako ćwiczenie dla Czytelnika.