prosta ℓ, zdefiniowana jak w części a), przecina odcinki A_1B_1 i C_1D_1 odpowiednio w punktach M i N. Skoro $FA_1 = FB_1$ i $FC_1 = FD_1$, to M i N są odpowiednio środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1. Zatem środek sfery opisanej na czworościanie $A_1B_1C_1D_1$ leży na prostej łączącej środki odcinków A_1B_1 i C_1D_1. W ten sam sposób uzasadniamy, że leży on na prostej łączącej środki odcinków B_1C_1 i A_1D_1. W takim razie musi pokrywać się ze środkiem ciężkości czworościanu $A_1B_1C_1D_1$, a to oznacza, że czworościan ten jest równościenny (korzystamy tu z twierdzenia opisanego w Kąciku przestrzennym 12, w *Delcie* 4/2012). Stąd wnioskujemy, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle A_1FB_1 = \sphericalangle C_1FD_1 = \sphericalangle CFD.$$

Analogicznie otrzymujemy pozostałe równości.

c) Wykorzystując zależności

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} = \overrightarrow{FA_1}, \qquad \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} = \overrightarrow{FB_1}, \qquad \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} = \overrightarrow{FC_1}, \qquad \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \overrightarrow{FD_1},$$

widzimy, że postulowaną równość możemy przepisać w postaci

$$(*) \qquad \overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FD_1} = \overrightarrow{0}.$$

Jeśli M i N są środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1, to

$$\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FB_1} = 2\overrightarrow{FM} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FD_1} = 2\overrightarrow{FN}.$$

Na koniec zauważmy, że skoro F jest środkiem ciężkości czworościanu $A_1B_1C_1D_1$, to $\overrightarrow{FM} = -\overrightarrow{FN}$.

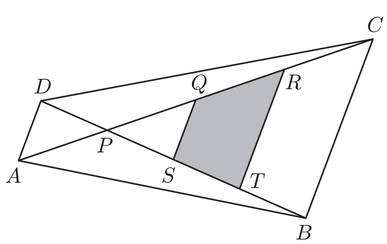
d) Wystarczy wykorzystać zależność $(*)$ i własności iloczynu skalarnego (np. $\cos\sphericalangle A_1FB_1 = \overrightarrow{FA_1} \circ \overrightarrow{FB_1}$). Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikom.

Michał KIEZA

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1384. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P. Na przekątnej AC dane są jeszcze punkty Q i R, dzielące ją wraz z P na cztery równe części, tzn. $AP = PQ = QR = RC$. Na przekątnej DB dane są jeszcze punkty S i T, które wraz z P dzielą ją na cztery równe części, tzn. $DP = PS = ST = TB$. Obliczyć stosunek pól czworokątów $STRQ$ i $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 6



M 1385. Udowodnić, że istnieje liczba C o następującej własności: jeśli równanie $1^k + \ldots + (m-1)^k = m^k$ ma rozwiązanie dla pewnych liczb naturalnych $k, m \geqslant 2$, to $m \leqslant C \cdot 2^k$.
Rozwiązanie na str. 8

Teza zadania M 1385 oznacza, że jeśli podane równanie diofantyczne ma rozwiązanie, to m nie może być *zbyt duże*. Do dziś pozostaje otwartym problemem hipoteza Erdősa, że to równanie nie ma rozwiązań (zob. również zadanie M 1374, *Delta* 1(464)/2013).

M 1386. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + \ldots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste $a_{n-3}, \ldots, a_0$ nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej niż n pierwiastków rzeczywistych.
Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 831. Księżyc obiega Ziemię i wraz z nią obiega też Słońce. Czy istnieją takie odcinki orbity Księżyca w jego ruchu wokół Słońca, w których „trójkąt" utworzony przez łuk orbity i promienie wodzące łączące jego końce ze środkiem Słońca nie jest figura wypukłą?
Rozwiązanie na str. 13

F 832. Jakie ciśnienie działa na zawór, którym gwałtownie zamknięto przepływ wody w rurze? Przed zamknięciem zaworu woda płynęła z prędkością u.
Rozwiązanie na str. 6