Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2013

Zadania z matematyki nr 661, 662

Redaguje Marcin E. KUCZMA

661. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt D na boku BC. Punkty E, F, G, leżące odpowiednio na bokach AB, CA, BC, są wyznaczone przez warunki $DE \perp AB$, $EF \perp CA$, $FG \perp BC$. Proste DE i FG przecinają się w punkcie P. W jakim stosunku prosta AP dzieli odcinek BC?

662. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n}-1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2 - nx_n)}{\ln n}.$$

Zadanie 662 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa. Jest to kontynuacja zadania 654 (którego rozwiązanie widzimy poniżej).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 647 ($WT = 1{,}34$) i 648 ($WT = 2{,}68$) z numeru 10/2012

Janusz Olszewski	Warszawa	41,89
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Paweł Łabędzki	Kielce	36,92
Witold Bednarek	Łódź	36,54
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	33,44

Rozwiązania zadań z numeru 1/2013

Przypominamy treść zadań:

653. W egzaminie testowym pytania są ponumerowane $1, 2, \ldots, n$. Za prawidłową odpowiedź na k-te pytanie uczestnik otrzymuje k punktów; za błędną (lub brak odpowiedzi) otrzymuje $-k$ punktów. Po zliczeniu wyników okazało się, że w każdej trójce uczestników znajdują się dwaj tacy, którzy uzyskali różne sumy punktów. Jaka jest największa liczba uczestników, dla której taka sytuacja mogła mieć miejsce?

654. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n}-1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

653. Wynik uzyskany przez uczestnika jest liczbą postaci $\pm1 \pm 2 \pm \ldots \pm n$ (dowolny układ znaków). Wszystkie takie liczby są jednakowej parzystości. Zatem zbiór możliwych wyników zawiera się w zbiorze

$$\{-N,\ -N+2,\ -N+4,\ \ldots,\ N-4,\ N-2,\ N\},\qquad \text{gdzie } N = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ten ostatni zbiór liczy $N+1$ elementów. Wykażemy, że każdy element jest możliwym wynikiem.

Uczestnik z przynajmniej jedną dobrą odpowiedzią uzyskał wynik $\sum i\varepsilon_i$, gdzie $\varepsilon_i = \pm1$ i nie wszystkie ε_i są równe -1. Zamieniamy ciąg $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ na ciąg $(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')$ określony następująco:

- gdy $\varepsilon_1 = 1$, bierzemy $\varepsilon_1' = -1$, pozostałe $\varepsilon_i' = \varepsilon_i$;
- gdy $\varepsilon_1 = -1$, znajdujemy najmniejszy numer j, dla którego $\varepsilon_j = 1$ (więc $\varepsilon_{j-1} = -1$); przyjmujemy $\varepsilon_{j-1}' = 1$, $\varepsilon_j' = -1$, pozostałe $\varepsilon_i' = \varepsilon_i$.

Uczestnik z „wektorem odpowiedzi” $(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')$ ma wynik $\left(\sum i\varepsilon_i'\right) = \left(\sum i\varepsilon_i\right) - 2$. Startując od prymusa z wektorem $(1, \ldots, 1)$, czyli z wynikiem N, możemy w opisany sposób wygenerować kolejno wyniki $N-2$, $N-4$ itd., aż do $-N$; łącznie $N+1$ wyników.

Warunek zadania żąda, by każdy wynik pojawił się co najwyżej dwukrotnie. Gdy pojawi się dokładnie dwukrotnie, da to szukane maksimum, równe $2(N+1) = n^2 + n + 2$.

654. Wszystkie wyrazy x_n są liczbami dodatnimi. Z nierówności $e^x > 1 + x$ (dla $x > 0$) wynika, że ciąg (x_n) jest malejący – zatem zbieżny do granicy $g \geqslant 0$. Równanie $(e^{x_n} - 1)x_{n+1} = x_n^2$ daje w granicy zależność $(e^g - 1)g = g^2$, która nie zachodzi dla żadnej liczby dodatniej g (w myśl tej samej nierówności). Zatem $g = \lim x_n = 0$.

Zastosujemy *twierdzenie Stolza*. Mówi ono, że jeśli (b_n) jest ciągiem rosnącym do nieskończoności, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

dla każdego ciągu (a_n), dla którego granica po prawej stronie istnieje.

Biorąc $a_n = 1/x_n$, $b_n = n$, mamy w mianowniku wyrażenia po prawej stronie jedynkę, a w liczniku:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - 1 - x_n}{x_n^2}.$$

Gdy $n \to \infty$ (więc $x_n \to 0$), ten iloraz dąży do $1/2$; widać to na przykład z początkowego fragmentu rozwinięcia potęgowego $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ (przy $x \to 0$). Tak więc $\lim 1/(x_n \cdot n) = \lim(a_n/b_n) = 1/2$, czyli $\lim nx_n = 2$.

Klub 44

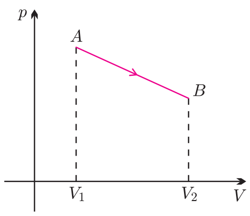
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2013

Zadania z fizyki nr 558, 559

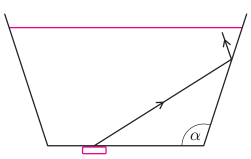
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

558. Jednoatomowy gaz doskonały poddano przemianie przedstawionej na wykresie pV (rys. 1). Końce odcinka AB leżą na tej samej izotermie, a odpowiadające im objętości wynoszą V_1 i V_2. Jaka jest część odcinka AB, dla której gaz pobiera ciepło w tej przemianie?

559. Cienkie szklane naczynie ma w przekroju kształt trapezu, a jego dno ma kształt prostokąta (rys. 2). Do naczynia nalano wody o współczynniku załamania $n = 1{,}33$. Jaką wartość musi mieć kąt α między podstawą a ścianką naczynia, aby przez boczną ściankę nie było widać monety umieszczonej pod dnem naczynia?



Rys. 1



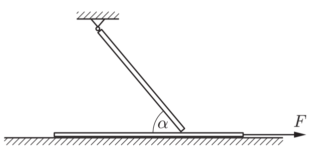
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 1/2013

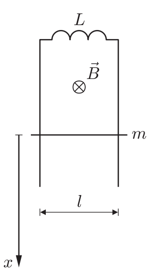
Przypominamy treść zadań:

550. Cienki arkusz papieru przyciśnięty jest do stołu jednorodnym prętem o masie m. Górny koniec pręta jest zamocowany przegubowo. Kąt między prętem i kartką wynosi α (rys. 3), współczynnik tarcia między nimi wynosi μ. Między kartką a stołem tarcia nie ma. Jaką minimalną, poziomą siłę trzeba przyłożyć do kartki, aby wyciągnąć ją spod pręta?

551. Cewkę o indukcyjności L dołączono do górnych końców dwóch równoległych szyn przewodzących ustawionych pionowo. Odstęp między szynami jest równy l. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B ma kierunek poziomy i jest prostopadłe do płaszczyzny szyn. Poziomy, przewodzący pręt o masie m może poruszać się w polu magnetycznym wzdłuż szyn w ten sposób, że stale się z nimi styka. Opór i samoindukcję przewodników oraz tarcie pręta o szyny zaniedbujemy. Znaleźć zależność położenia pręta od czasu $x(t)$ (rys. 4). Prędkość początkowa pręta jest równa zeru.



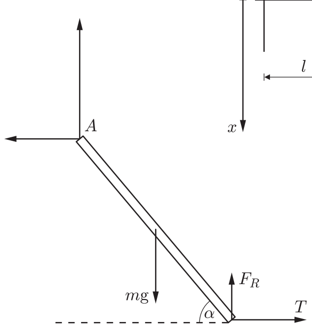
Rys. 3



Rys. 4

550. Kartkę uda się wyciągnąć, gdy przyłożona siła F przekroczy maksymalną wartość tarcia statycznego między prętem i kartką: $F > T_{\max} = \mu F_N$, gdzie F_N jest siłą nacisku pręta na kartkę, równą co do wartości sile reakcji F_R kartki na pręt. Rozważmy sytuację graniczną, gdy siła tarcia osiągnęła maksymalną wartość, a układ pozostaje jeszcze w równowadze. Oznacza to, że wszystkie siły działające na pręt równoważą się, a wypadkowy moment tych sił względem dowolnego punktu wynosi 0. Warunek równowagi momentów sił względem punktu A (rys. 5) ma postać $mg\frac{l}{2}\cos\alpha = T_{\max} l \sin\alpha + F_R l \cos\alpha$, gdzie l jest długością pręta. Uwzględniając, że $F_R = T_{\max}/\mu$, otrzymujemy

$$F > \frac{\frac{\mu}{2} mg\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$



Rys. 5

551. Gdy pręt zaczyna opadać pod wpływem siły ciężkości, między punktami styku z szynami powstaje siła elektromotoryczna indukcji $\varepsilon = Bv_x l$, gdzie $v_x = \Delta x/\Delta t$ jest szybkością zmian położenia pręta. Prąd indukcyjny płynie w takim kierunku, żeby przeciwdziałać zmianom strumienia pola magnetycznego, które go wywołują, czyli siła elektrodynamiczna działająca na pręt ma zwrot przeciwny do siły ciężkości. Równanie ruchu pręta ma więc postać $ma_x = mg - BIl$, gdzie I jest natężeniem prądu w obwodzie. Możemy też napisać drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu zawierającego pręt i cewkę: $Bv_x l = L\Delta I/t$. Uwzględniając warunki początkowe $x(0) = 0$ oraz $I(0) = 0$, otrzymujemy $Bxl = LI$. Wstawiając otrzymane stąd wyrażenie na natężenie prądu do równania ruchu, możemy zapisać je w postaci

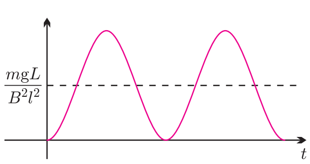
$$a_x + \frac{B^2l^2}{mL}\left(x - \frac{mgL}{B^2l^2}\right) = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego. Pręt drga wokół położenia równowagi, którego współrzędna wynosi

$$x_0 = \frac{mgL}{B^2l^2}.$$

Siła elektrodynamiczna w tym położeniu równoważy siłę ciężkości. Zależność położenia pręta od czasu dana jest wzorem $x = x_0 + A\sin(\omega t + \varphi)$, gdzie częstość drgań jest równa $\omega = Bl/\sqrt{mL}$. Zależność prędkości od czasu ma postać $v_x = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$. Amplitudę drgań A i fazę początkową φ możemy wyznaczyć z warunków początkowych: $x(0) = x_0 + A\sin\varphi = 0$ oraz $v_x(0) = A\omega\cos\varphi = 0$. Uwzględniając, że $A > 0$, otrzymujemy $\varphi = -\pi/2$ oraz $A = x_0$. Ostatecznie zależność położenia pręta od czasu ma postać (rys. 6)

$$x = \frac{mgL}{B^2l^2}(1 - \cos\omega t).$$



Rys. 6

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 544 ($WT = 2{,}08$) i 545 ($WT = 1{,}24$) z numeru 10/2012

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	39,02
Tomasz Rudny	Warszawa	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,13
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,34