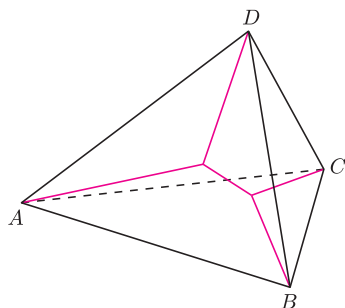


Kącik przestrzenny (17): Punkt Fermata–Torricellego



Rys. 1

Tym razem opowiemy o punkcie Fermata–Torricellego w czworoscianie. Definiujemy go przez analogię do przypadku trójkąta: jest to punkt F , który minimalizuje sumę odległości od wierzchołków czworoscianu. Zauważmy jednak, że łamana wyznaczona przez cztery odcinki łączące punkt F z wierzchołkami czworoscianu wcale nie musi być najkrótszą siecią odcinków łączących te wierzchołki (bardzo często krótszą sieć uzyskuje się, biorąc łamaną złożoną z pięciu odcinków, jak na rysunku 1). Okazuje się, że jeśli miary wszystkich kątów trójściennych przy wierzchołkach czworoscianu $ABCD$ są mniejsze od π , to punkt F leży wewnątrz tego czworoscianu (przez miarę kąta trójściennego rozumiemy pole powierzchni części sfery jednostkowej o środku w wierzchołku tego kąta wyciętej przez ten kąt). Przy tym założeniu punkt ten ma szereg ciekawych własności, opisanych poniżej.

Twierdzenie. *Jeśli punkt F leżący wewnątrz czworoscianu $ABCD$ minimalizuje sumę $AF + BF + CF + DF$, to*

- dwusieczne kątów płaskich AFB i CFD pokrywają się (tak samo dla par kątów BFC i AFD oraz AFC i BFD),
- $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD$, $\sphericalangle BFC = \sphericalangle AFD$ i $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BFD$,
- jeśli $|\overrightarrow{XY}|$ oznacza długość wektora \overrightarrow{XY} , to spełniona jest zależność

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} + \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} + \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} + \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \vec{0},$$

- $\cos \sphericalangle AFB + \cos \sphericalangle BFC + \cos \sphericalangle CFA = -1$.

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, wprowadźmy pewien przydatny obiekt.

Definicja. *Elipsoidą obrotową o ogniskach A i B nazywamy powierzchnię powstałą w wyniku obrotu wokół prostej AB pewnej elipsy o ogniskach A i B .*

Wprost z definicji wynika następująca własność: *elipsoida obrotowa o ogniskach A i B jest zbiorem wszystkich takich punktów X przestrzeni, że $AX + BX = a$, gdzie $a > AB$ jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą. Ponadto, jeśli Y leży wewnątrz danej elipsoidy, to $AY + BY < a$, zaś jeśli Y leży na zewnątrz elipsoidy, to $AY + BY > a$ (łatwo to udowodnić, korzystając z nierówności trójkąta).*

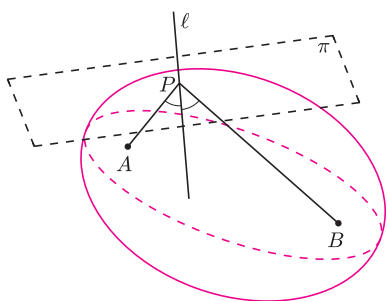
Poniższy fakt jest odpowiednikiem pewnej własności elipsy, opisanej np. w *Delcie* 2/2007 na stronie 1.

Fakt. *Załóżmy, że punkt P leży na elipsoidzie o ogniskach A i B , zaś π jest płaszczyzną styczną do tej elipsoidy w punkcie P . Niech ℓ będzie prostą prostopadłą do płaszczyzny π , przechodzącą przez punkt P (rys. 2). Wtedy ℓ jest dwusieczną kąta płaskiego APB .*

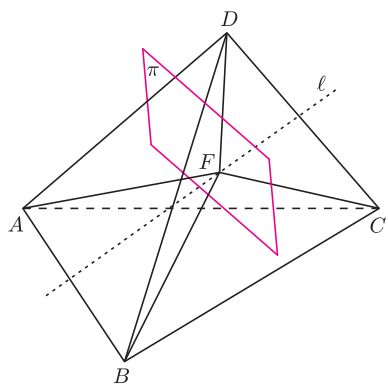
Nietrudne uzasadnienie można znaleźć analogicznie do przypadku elipsy, co pozostawiamy Czytelnikom jako zadanie, a teraz przejdziemy do dowodu głównego twierdzenia.

Dowód twierdzenia. a) Rozważmy elipsoidę obrotową \mathcal{E}_1 o ogniskach A i B oraz elipsoidę obrotową \mathcal{E}_2 o ogniskach C i D przechodzące przez punkt F . Ponieważ punkt F minimalizuje sumę $AF + BF + CF + DF$, to z wcześniejszych obserwacji wnosimy, że dane dwie elipsoidy nie mogą mieć punktów wspólnych wewnętrznych, a więc muszą być styczne w punkcie F (rys. 3). Niech π oznacza wspólną płaszczyznę styczną do tych elipsoid w punkcie F , zaś ℓ prostą prostopadłą do płaszczyzny π , przechodzącą przez F . Wówczas z przytoczonego powyżej faktu wynika, że prosta ta jest dwusieczną zarówno kąta płaskiego AFB , jak i CFD . Identyczne rozumowanie przeprowadzimy dla par kątów BFC i AFD oraz AFC i BFD .

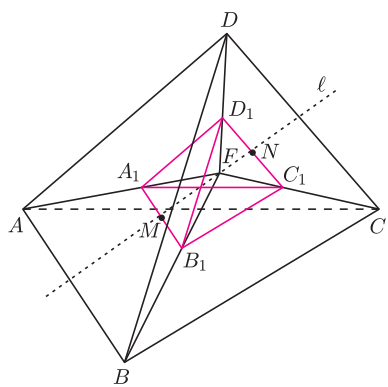
b) Wybierzmy na półprostych FA^{\rightarrow} , FB^{\rightarrow} , FC^{\rightarrow} i FD^{\rightarrow} odpowiednio takie punkty A_1 , B_1 , C_1 i D_1 , że $FA_1 = FB_1 = FC_1 = FD_1 = 1$ (rys. 4). Punkt F jest więc środkiem sfery opisanej na czworoscianie $A_1B_1C_1D_1$. Niech ponadto



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

prosta ℓ , zdefiniowana jak w części a), przecina odcinki A_1B_1 i C_1D_1 odpowiednio w punktach M i N . Skoro $FA_1 = FB_1$ i $FC_1 = FD_1$, to M i N są odpowiednio środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1 . Zatem środek sfery opisanej na czworobocianie $A_1B_1C_1D_1$ leży na prostej łączącej środki odcinków A_1B_1 i C_1D_1 . W ten sam sposób uzasadniamy, że leży on na prostej łączącej środki odcinków B_1C_1 i A_1D_1 . W takim razie musi pokrywać się ze środkiem ciężkości czworobocianu $A_1B_1C_1D_1$, a to oznacza, że czworobocian ten jest równościenny (korzystamy tu z twierdzenia opisanego w Kąciku przestrzennym 12, w *Delcie* 4/2012). Stąd wnioskujemy, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle A_1FB_1 = \sphericalangle C_1FD_1 = \sphericalangle CFD.$$

Analogicznie otrzymujemy pozostałe równości.

c) Wykorzystując zależności

$$\frac{\vec{FA}}{|\vec{FA}|} = \vec{FA}_1, \quad \frac{\vec{FB}}{|\vec{FB}|} = \vec{FB}_1, \quad \frac{\vec{FC}}{|\vec{FC}|} = \vec{FC}_1, \quad \frac{\vec{FD}}{|\vec{FD}|} = \vec{FD}_1,$$

widzimy, że postulowaną równość możemy przepisać w postaci

$$(*) \quad \vec{FA}_1 + \vec{FB}_1 + \vec{FC}_1 + \vec{FD}_1 = \vec{0}.$$

Jeśli M i N są środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1 , to

$$\vec{FA}_1 + \vec{FB}_1 = 2\vec{FM} \quad \text{oraz} \quad \vec{FC}_1 + \vec{FD}_1 = 2\vec{FN}.$$

Na koniec zauważmy, że skoro F jest środkiem ciężkości czworobocianu $A_1B_1C_1D_1$, to $\vec{FM} = -\vec{FN}$.

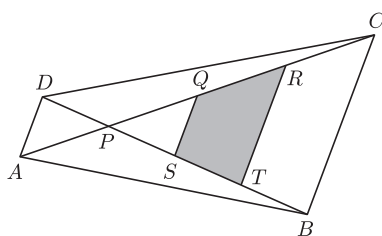
d) Wystarczy wykorzystać zależność (*) i własności iloczynu skalarnego (np. $\cos \sphericalangle A_1FB_1 = \vec{FA}_1 \circ \vec{FB}_1$). Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikom.

Michał KIEZA



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1384. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P . Na przekątnej AC dane są jeszcze punkty Q i R , dzielące ją wraz z P na cztery równe części, tzn. $AP = PQ = QR = RC$. Na przekątnej DB dane są jeszcze punkty S i T , które wraz z P dzielą ją na cztery równe części, tzn. $DP = PS = ST = TB$. Obliczyć stosunek pól czworokątów $STRQ$ i $ABCD$. Rozwiązanie na str. 6

M 1385. Udowodnić, że istnieje liczba C o następującej własności: jeśli równanie $1^k + \dots + (m-1)^k = m^k$ ma rozwiązanie dla pewnych liczb naturalnych $k, m \geq 2$, to $m \leq C \cdot 2^k$.

Rozwiązanie na str. 8

M 1386. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + \dots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste a_{n-3}, \dots, a_0 nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej niż n pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 831. Księżyc obiega Ziemię i wraz z nią obiega też Słońce. Czy istnieją takie odcinki orbity Księżyca w jego ruchu wokół Słońca, w których „trójkąt” utworzony przez łuk orbity i promienie wodzące łączące jego końce ze środkiem Słońca nie jest figurą wypukłą?

Rozwiązanie na str. 13

F 832. Jakie ciśnienie działa na zawór, którym gwałtownie zamknięto przepływ wody w rurze? Przed zamknięciem zaworu woda płynęła z prędkością u .

Rozwiązanie na str. 6

Teza zadania M 1385 oznacza, że jeśli podane równanie diofantyczne ma rozwiązanie, to m nie może być *zbyt duże*. Do dziś pozostaje otwartym problemem hipoteza Erdősa, że to równanie nie ma rozwiązań (zob. również zadanie M 1374, *Delta* 1(464)/2013).