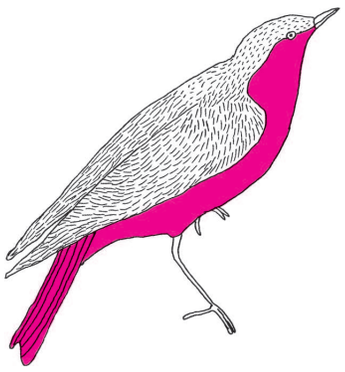
Złośliwy problem $(MAX, +)$ i kubełkowe struktury danych

Wojciech ŚMIETANKA[*]



Dany jest ciąg złożony z n nieujemnych liczb całkowitych $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Na ciągu c chcemy wykonywać operacje dwóch rodzajów:

- `update`(i, j, w) – modyfikuje wartości wyrazów ciągu o indeksach z przedziału od i do j w sposób zależny od parametru w (dodatniej liczby całkowitej);
- `query`(i, j) – podaje *zagregowaną* wartość dla podciągu o indeksach od i do j.

W obydwu przypadkach zakładamy, że $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Będziemy rozważali dwie różne operacje `update`, które oznaczymy symbolicznie przez $+$ i MAX. W operacji $+$ należy do każdego wyrazu podciągu $c_i, \ldots, c_j$ dodać liczbę w. Z kolei operacja MAX polega na zmianie wartości wyrazu c_l $(i \leqslant l \leqslant j)$ na $\max(c_l, w)$ – innymi słowy, jeśli wyraz miał wcześniej wartość nie mniejszą niż w, to jej nie zmienia, a jeśli jego wartość była mniejsza od w, to jego nową wartością jest w.

Podobnie definiujemy dwie operacje `query`: $+$ i MAX. Na zapytanie $+$ odpowiadamy, podając sumę wyrazów z podciągu $c_i, \ldots, c_j$. Odpowiedzią na zapytanie typu MAX jest natomiast wartość największego wyrazu w rozważanym podciągu.

Biorąc pod uwagę wszystkie kombinacje poszczególnych operacji, otrzymujemy cztery różne warianty problemu. Każdy taki wariant oznaczamy za pomocą pary, której pierwszy wyraz opisuje rodzaj operacji modyfikacji, a drugi określa zapytanie. Mamy zatem następujące warianty: $(+, +)$, $(+, MAX)$, $(MAX, +)$ oraz (MAX, MAX).

Okazuje się, że nasz problem ma kilka ciekawych zastosowań. Wariant $(+, MAX)$ można wykorzystać do implementacji systemu obsługi rezerwacji miejsc w pociągu na trasie łączącej $n + 1$ stacji. W pociągu znajduje się ustalona liczba miejsc siedzących. Każda rezerwacja dotyczy konkretnej liczby pasażerów i wskazuje numery dwóch stacji, na których pasażerowie zamierzają wsiąść i wysiąść. Naszym celem jest przyjmować kolejno wszystkie rezerwacje, które nie powodują przepełnienia pociągu.

Oznaczmy przez c_l aktualną liczbę pasażerów, którzy będą w pociągu na trasie pomiędzy stacjami l oraz $l + 1$. Rezerwację na podróż ze stacji i do stacji j dla w pasażerów możemy przyjąć, jeśli wartość `query`$(i, j - 1) + w$ jest nie większa niż liczba miejsc w pociągu. Po przyjęciu rezerwacji wykonujemy `update`$(i, j - 1, w)$.

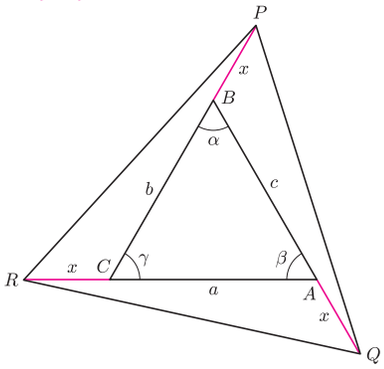
Inaczej można na to spojrzeć jak na problem kontroli przesyłania danych między serwerami połączonymi jedną linią danych o określonej przepustowości albo problem obsługi pobierania danych z Internetu przez użytkowników sieci lokalnej w zadanych przedziałach czasowych (sieć ma ograniczony transfer).

Wariant (MAX, MAX) ma natomiast elegancką interpretację kombinatoryczną powiązaną z popularną grą Tetris. Odpowiada on mianowicie sytuacji, w której klocki, które opadają na planszę, mają regularną strukturę (np. mają kształt prostokątów), a naszym celem jest, dla każdego klocka, orzec, w którym miejscu się on zatrzyma, jeśli spuścimy go z zadanej pozycji początkowej (nie mamy możliwości wykonywania w locie obrotów ani przesunięć). Z kolei wariant $(+, +)$ reprezentuje dynamiczny problem obliczania sum częściowych ciągu.

Trzy z podanych wariantów wyjściowego problemu mają zatem jasno określoną interpretację. Co więcej, znane są ich efektywne rozwiązania, w których koszt obsługi ciągu m zapytań to $O(n + m \log n)$ (szukaną strukturą danych są tzw. drzewa przedziałowe, o których więcej można przeczytać lub posłuchać na stronie `http://was.zaa.mimuw.edu.pl`).

[*]pracownik firmy Google

Rozwiązanie zadania M 1381.
Przyjmijmy oznaczenia boków i kątów trójkąta ABC jak na rysunku i załóżmy, że $a \geqslant b \geqslant c$.



Wówczas $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, a stąd $\cos\alpha \leqslant \cos\beta \leqslant \cos\gamma$, ponieważ funkcja cos jest malejąca na przedziale $(0, \pi)$. Przyjmijmy, że $AP = BQ = CR = x$. Wówczas z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$$QR^2 = x^2 + (a+x)^2 + 2x(a+x)\cos\beta,$$
$$PQ^2 = x^2 + (c+x)^2 + 2x(c+x)\cos\alpha.$$

Gdyby było $a > c$, to ponieważ $\cos\beta \geqslant \cos\alpha$, mielibyśmy $QR > PQ$, co przeczyłoby założeniu, że trójkąt PQR jest równoboczny. W takim razie $a = b = c$.

Za to czwarty wariant, $(MAX, +)$, jest inny. Jego interpretacja kombinatoryczna nie jest wcale aż tak jasna, a do tego nie znamy sposobu rozwiązania go w czasie $O(n + m\log n)$ (w tym przypadku klasyczne drzewa przedziałowe nie sprawdzają się). Okazuje się jednak, że można go w miarę prosto rozwiązać, korzystając z pewnej *kubełkowej* struktury danych. Nasze rozwiązanie będzie działało w czasie $O(n + m\sqrt{n}\log n)$.

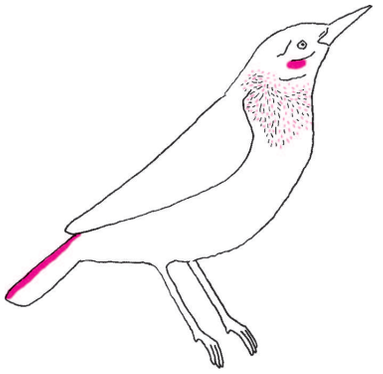
Zacznijmy od podziału wyrazów ciągu pomiędzy kubełki, umieszczając w każdym kubełku, z wyjątkiem ostatniego, $k = \lceil\sqrt{n}\,\rceil$ wyrazów. Jeśli ostatni kubełek jest mniejszy, możemy uzupełnić go sztucznymi wyrazami do rozmiaru k. Oprócz kolejnych wyrazów ciągu kubełek będzie przechowywał pewne dane pomocnicze. Zanim opiszemy strukturę kubełka, zaproponujmy trochę inny sposób myślenia o operacji `update`(i, j, w). Zamiast mówić, że dla każdego c_l, takiego że $i \leqslant l \leqslant j$, wykonujemy $c_l := \max(c_l, w)$, można wyobrazić sobie, że dodajemy nowe ograniczenie dolne na liczby na pozycjach od i do j. Wtedy wartość liczby w kubełku będzie równa maksimum z jej początkowej wartości oraz wszystkich ograniczeń dolnych jej dotyczących. Takie ograniczenia dolne będą trzymane osobno dla każdego kubełka.

Struktura kubełka będzie następująca:

- $t[1..k]$ – tablica kolejnych wyrazów ciągu, które znajdują się w kubełku;
- $sorted\_t[1..k]$ – posortowana tablica liczb t;
- $sum\_sorted\_t[0..k]$ – sumy prefiksowe tablicy $sorted\_t[1..k]$, czyli $sum\_sorted\_t[p] = sorted\_t[1] + sorted\_t[2] + \ldots + sorted\_t[p]$;
- $minimum$ – dolne ograniczenie na wszystkie wyrazy ciągu przechowywane w kubełku, czyli maksimum z wartości w z operacji `update`(i, j, w) dotyczących całego przedziału kubełka; aktualna wartość l-tej liczby z kubełka to zawsze $\max(t[l], minimum)$.

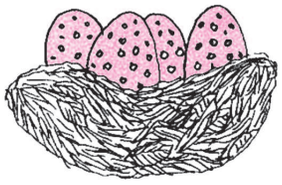
Każdy kubełek umożliwia wykonywanie następujących operacji pomocniczych (szczegółowy opis ich implementacji znajduje się w dalszej części artykułu):

1. $sum\_all()$ – obliczenie sumy aktualnych wartości wszystkich wyrazów ciągu zawartych w kubełku (działa w czasie $O(\log k)$);
2. $sum(i, j)$ – obliczenie sumy wyrazów o indeksach od i do j, dla $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ (działa w czasie $O(k)$);
3. $update\_all(new\_minimum)$ – aktualizacja dolnego ograniczenia na całym przedziale do wartości co najmniej $new\_minimum$ (działa w czasie $O(1)$);
4. $update(i, j, new\_minimum)$ – zwiększenie wyrazów o indeksach od i do j, dla $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, do wartości co najmniej $new\_minimum$ (działa w czasie $O(k\log k)$).



Zauważmy teraz, że dowolny zakres indeksów od i do j $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ można rozbić na pewną liczbę pełnych kubełków (oczywiście, nie więcej niż $\sqrt{n}$) oraz na co najwyżej dwa niepełne kubełki (te skrajne). Dzięki temu zapytanie o sumę liczb na przedziale od i do j można podzielić na nie więcej niż $\sqrt{n}$ zapytań $sum\_all()$ oraz co najwyżej dwa zapytania $sum(i', j')$. Stąd każde takie zapytanie obsługujemy w czasie $O(\sqrt{n}\log n)$. Operację modyfikacji ciągu na indeksach od i do j można także wykonać w czasie $O(\sqrt{n}\log n)$, podobnie rozbijając cały przedział na nie więcej niż $\sqrt{n}$ kubełków, na których wykonujemy operację $update\_all(new\_minimum)$, i co najwyżej dwa brzegowe kubełki z wykonywaną operacją $update(i', j', new\_minimum)$.

Przykład. W tabeli na następnej stronie przedstawiono, jak zmienia się przykładowa kubełkowa struktura danych $(n = 9)$ w wyniku pojedynczej modyfikacji. Warto zwrócić uwagę, że w środkowym kubełku zmienia się tylko dolne ograniczenie, tj. $minimum$.



	Kubełek 1				Kubełek 2				Kubełek 3			
		c_1	c_2	c_3		c_4	c_5	c_6		c_7	c_8	c_9
t		4	2	1		7	8	1		1	5	2
sorted_t		1	2	4		1	7	8		1	2	5
sum_sorted_t	0	1	3	7	0	1	8	16	0	1	3	8
minimum		0				0				0		
`update`$(3, 8, 4)$												
t		4	2	4		7	8	1		4	5	2
sorted_t		2	4	4		1	7	8		2	4	5
sum_sorted_t	0	2	6	10	0	1	8	16	0	2	6	11
minimum		0				4				0		

Pozostaje opisać, jak korzystając z przechowywanych danych, efektywnie wykonać cztery operacje pomocnicze oferowane przez kubełek.

function *sum_all*()
  pos := ostatnia pozycja taka, że *sorted_t*[*pos*] < *minimum*
  return *minimum* · *pos* + *sum_sorted_t*[*k*] − *sum_sorted_t*[*pos*]

Ostatnią pozycję *pos* znajdujemy, wyszukując binarnie. Zauważmy, że w tablicy t jest dokładnie *pos* liczb mniejszych od *minimum* oraz dokładnie $k - pos$ liczb nie mniejszych niż *minimum*. Skoro aktualna wartość każdej liczby to $\max(minimum, t[i])$, więc suma aktualnych wartości wynosi $minimum \cdot pos$ (sumujemy *pos* najmniejszych liczb) plus suma $k - pos$ największych liczb, czyli *sum_sorted_t*[*k*] − *sum_sorted_t*[*pos*].

function *sum*(i, j)
  result := 0
  for $p := i$ **to** j **do**
    result := *result* + $\max(minimum, t[p])$
  return *result*

W powyższej funkcji sumujemy aktualne wartości wyrazów z kubełka z określonych pozycji.

Aktualizacja dolnego ograniczenia na cały kubełek jest bardzo łatwa:

function *update_all*(*new_minimum*)
  minimum := $\max(new\_minimum, minimum)$

Jeśli pojawia się nowe dolne ograniczenie, które nie dotyczy całego zakresu obejmowanego przez kubełek, lecz jedynie jego części, należy zaktualizować liczby tylko z tego zakresu. Niestety, po takiej operacji tablice *sorted_t* oraz *sum_sorted_t* stają się nieaktualne, więc obliczamy je ponownie. Oto zapis stosownego algorytmu:

function *update*(i, j, *new_minimum*)
  for $p := i$ **to** j **do**
    $t[p] := \max(t[p], new\_minimum)$
  sorted_t := *sort*($t[1..k]$)
  sum_sorted_t[0] := 0
  for $p := 1$ **to** k **do**
    sum_sorted_t[p] := *sum_sorted_t*[$p - 1$] + *sorted_t*[p]

Zaprezentowane rozwiązanie jest dosyć szybkie, jednak nie widać powodu, dla którego problemu $(MAX, +)$ nie można by rozwiązać jeszcze szybciej. Być może któremuś z Czytelników uda się skonstruować takie rozwiązanie? Czytelnik, który do końca lipca 2013 roku przyśle do redakcji rozwiązanie opisanego problemu o najlepszej złożoności, nie gorszej jednak niż $O(n + m\sqrt{n})$, zostanie nagrodzony kilogramem szwajcarskiej czekolady w przesyłce prosto z Zurychu. W przypadku wielu rozwiązań o tej samej złożoności nagrodzimy subiektywnie najładniejsze, w przypadku tego samego najładniejszego rozwiązania – pierwsze spośród otrzymanych.