Parzyste, nieparzyste

Jakub RADOSZEWSKI

Zadanie pojawiło się na Akademickich Mistrzostwach Polski w Programowaniu Zespołowym w 2012 roku.

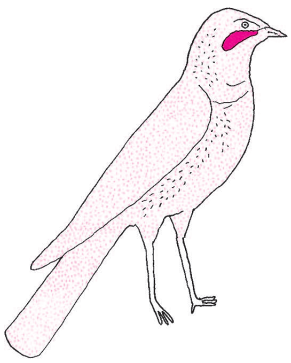
Zadanie. Powiemy, że ciąg liczb naturalnych jest k-parzysty, jeśli każdy jego k-elementowy spójny fragment ma parzystą sumę. Przykładowo, ciąg:

$$A = (4,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1,\ 2,\ 5,\ 2,\ 6,\ 1,\ 4,\ 1,\ 2,\ 4)$$

jest 5-parzysty, a ciąg:

$$B = (5,\ 2,\ 4,\ 4,\ 1,\ 6,\ 3,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 4,\ 1)$$

nie. Ile minimalnie wyrazów ciągu B trzeba zmienić, aby stał się on 5-parzysty?



Następujące podejście jest bardzo naturalne. Suma pierwszych pięciu wyrazów ciągu B jest równa 16, jest więc parzysta – nic nie trzeba zmieniać. Suma wyrazów od drugiego do szóstego jest równa 17 – to źle. Aby suma ta stała się parzysta, wystarczy szósty wyraz ciągu zamienić na jakikolwiek nieparzysty, np. na 1:

$$B' = (5,\ 2,\ 4,\ 4,\ 1,\ \mathbf{1},\ 3,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 4,\ 1).$$

Teraz suma pięciu rozważanych wyrazów jest równa 12 – możemy iść dalej. Kolejny wyraz ciągu jest równy 3, a suma pięciu wyrazów kończących się na tym wyrazie to 13. Wystarczy zatem na siódmej pozycji ciągu wstawić jakąkolwiek liczbę parzystą, np. 2. Nowy ciąg ma postać:

$$B'' = (5,\ 2,\ 4,\ 4,\ 1,\ 1,\ \mathbf{2},\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 4,\ 1).$$

Kontynuując to podejście, zmienimy jeszcze wyrazy 3, 6, 7 i 1. Niestety, wykonaliśmy w sumie sześć zamian, a da się lepiej.

Spróbujmy podejść do zadania bardziej metodycznie. Przede wszystkim zauważmy, że znaczenie ma jedynie parzystość wyrazów ciągu. Wystarczy więc, zamiast B, rozważać ciąg:

$$C = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1).$$

Oznaczmy przez W binarny ciąg wynikowy (powstały z C poprzez minimalną liczbę zamian).

Dla dowolnego i, sumy $W_i + W_{i+1} + W_{i+2} + W_{i+3} + W_{i+4}$ oraz $W_{i+1} + W_{i+2} + W_{i+3} + W_{i+4} + W_{i+5}$ muszą mieć tę samą parzystość. Stąd $W_i = W_{i+5}$. Widzimy zatem, że ciąg W rozpada się na 5 podciągów stałych: $W_1 = W_6 = W_{11}$, $W_2 = W_7 = W_{12}$ itd.

Zapiszmy ciąg C tak, aby wyrazy o indeksach różniących się o 5 znajdowały się jeden pod drugim:

1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	1	

Wyrazy położone w tych samych kolumnach muszą stać się równe w ciągu W. Aby wykonać jak najmniej zamian, w pierwszej kolumnie ustawimy same zera, w drugiej – same jedynki, w trzeciej – zera, w czwartej i piątej – jedynki. Razem wyszły nam trzy zamiany. Jakie to proste!

Otóż... nie do końca. Zapiszmy nasz wynikowy ciąg:

0	1	0	1	1
0	1	0	1	1
0	1	0	1	

Widzimy, że sumy wszystkich pięcioelementowych fragmentów ciągu są równe, ale – nieparzyste! No tak – widać, gdzie popełniliśmy błąd. Aby wszystkie sumy stały się parzyste, należałoby jedną z kolumn zmienić na odwrót. Najbardziej opłaca się wybrać kolumnę, która w tym układzie wymaga najmniej zamian: ustawiamy jedynki w pierwszej kolumnie (względnie zera w drugiej lub w czwartej). Ostatecznie wykonaliśmy cztery zamiany. Oto uzyskany przez nas ciąg wynikowy:

$$W = (1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)$$

oraz ciąg B po minimalnej liczbie zamian:

$$B_W = (5,\ \mathbf{1},\ 4,\ \mathbf{1},\ 1,\ \mathbf{1},\ 3,\ 2,\ 3,\ 5,\ \mathbf{1},\ 7,\ 4,\ 1).$$

Rozwiązanie zadania F 830.
Siła działająca na dziewczę trzymające się liny jest w każdej chwili prostopadła do kierunku ruchu dziewczęcia, nie wykonuje więc nad dziewczęciem żadnej pracy. Prędkość dziewczęcia zderzającego się ze słupem będzie więc równa jego prędkości początkowej.