Mnóstwo rachunków?

Joanna JASZUŃSKA

Geometria analityczna kojarzona bywa z dużą ilością rachunków, takie rozwiązania często są długie i pracochłonne. Oto kilka przykładów, że nie zawsze jest tak źle.

1. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz dowolny punkt P na jego okręgu wpisanym. Wykaż, że suma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ nie zależy od wyboru punktu P.

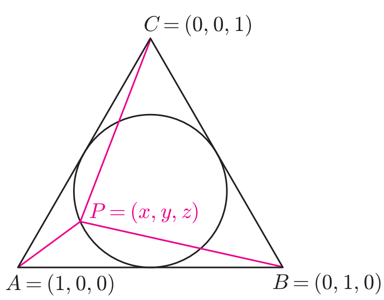
2. Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

3. Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=20, \\ (x+4)^2+(y+2)^2=5. \end{cases}$

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD, zaś przekątne przecinają się w punkcie E. Wykaż, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

5. W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykaż, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są parami prostopadłe.

Rozwiązania



Rys. 1. Odległość punktów (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) równa jest $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

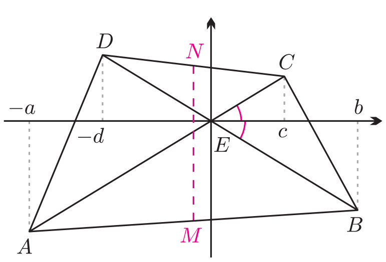
R1. Wprowadźmy układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ tak, aby $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$ (rys. 1). Wtedy równanie płaszczyzny ABC to $x+y+z=1$.

Rozważmy sferę daną równaniem $x^2+y^2+z^2=r^2$ dla takiego $r>0$, aby okrąg wpisany w trójkąt ABC był przekrojem tej sfery płaszczyzną ABC.

Niech $P=(x,y,z)$. Wówczas $PA^2+PB^2+PC^2 = ((x-1)^2+y^2+z^2) + (x^2+(y-1)^2+z^2)+(x^2+y^2+(z-1)^2) = 3(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)+3 = 3r^2-2+3 = 3r^2+1$, czyli faktycznie nie zależy od wyboru punktu P z okręgu. $\square$

R2. Równania opisują płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ oraz sferę o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu 1. Sfera ta przechodzi przez te same trzy punkty, więc przecina się z daną płaszczyzną wzdłuż okręgu przez nie wyznaczonego. Stąd układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań. $\square$

R3. Równania opisują okrąg o środku $(2,1)$ i promieniu $2\sqrt{5}$ oraz okrąg o środku $(-4,-2)$ i promieniu $\sqrt{5}$. Odległość między środkami tych okręgów równa jest $\sqrt{(2+4)^2+(1+2)^2} = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{2^2+1^2} = 3\sqrt{5}$, czyli równa sumie ich promieni. Okręgi są więc styczne i układ równań ma jedno rozwiązanie. $\square$



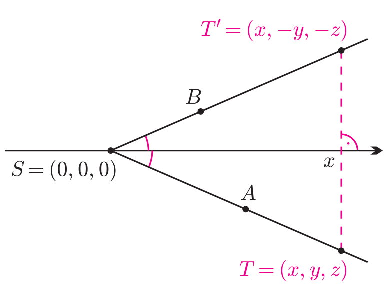
Rys. 2

R4. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby $E=(0,0)$ oraz by dwusieczna kąta BEC była zawarta w dodatniej półosi OX (rys. 2). Czworokąt jest wypukły, więc pierwszymi współrzędnymi punktów A,B,C,D są odpowiednio $-a,b,c,-d$ dla pewnych $a,b,c,d>0$.

Prosta MN jest prostopadła do osi OX wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze współrzędne punktów M i N są równe, czyli gdy $\frac{1}{2}(-a+b)=\frac{1}{2}(c-d)$ $(*)$.

Odcinki AC i BD tworzą z poziomą osią ten sam kąt ($\frac{1}{2}\sphericalangle BEC$), więc warunek $AC=BD$ równoważny jest warunkowi, że rzuty tych odcinków na oś OX są równe. Każdy z rzutów zawiera punkt $E=(0,0)$, zatem są one równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a+c=b+d$ $(**)$.

Warunki $(*)$ i $(**)$ są równoważne, co kończy dowód. $\square$



Rys. 3. Przy symetrii względem osi OX współrzędna x się nie zmienia, a współrzędne y i z zmieniają znak.

R5. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby wyróżniony wierzchołek S czworościanu był w punkcie $(0,0,0)$, a prostopadłe dwusieczne kątów płaskich ASB i BSC były zawarte odpowiednio w dodatnich półosiach OX i OY.

Rozważmy dowolny punkt $T=(x,y,z)$ z półprostej $SA^{\rightarrow}$. Jego obrazem w symetrii względem osi OX jest punkt $T'=(x,-y,-z)$ na półprostej $SB^{\rightarrow}$ (rys. 3). Z kolei obrazem punktu T' w symetrii względem osi OY jest punkt $T''=(-x,-y,z)$ na półprostej $SC^{\rightarrow}$. Punkty T'' i T są więc symetryczne względem osi OZ. Zatem, z dowolności wyboru T, całe półproste $SC^{\rightarrow}$ i $SA^{\rightarrow}$ są symetryczne względem OZ. Stąd dwusieczna kąta CSA zawarta jest w osi OZ, co kończy dowód. $\square$

Zadania 4 i 5 pochodzą z LXII Olimpiady Matematycznej.