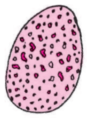
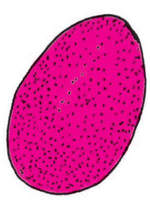
Matching markets Noblem nagrodzone

*Michał KRAWCZYK**

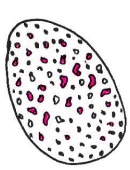


Komitet Noblowski zadecydował o przyznaniu Nagrody w dziedzinie nauk ekonomicznych za rok 2012 Lloydowi Shapleyowi i Alvinowi Rothowi. Nagrody z ekonomii nie są, ściśle rzecz ujmując, Nagrodami Nobla, bo gdy wynalazca dynamitu ustanawiał prestiżowe wyróżnienia, żadnej z nauk społecznych nie uznawano za wystarczająco rozwiniętą. Od roku 1969 są jednak przyznawane Nagrody z ekonomii ufundowane przez Bank Szwecji, ekonomiści są zatem i tak w lepszym położeniu niż matematycy. Co prawda, niekiedy Komitet Noblowski mimowolnie sugerował, że ekonomia wciąż pozostaje niedojrzała, przyznając w tym samym roku nagrody badaczom głoszącym poglądy wzajemnie sprzeczne (*vide* Hayek i Myrdal w 1974 roku czy Kahneman i Smith w 2002 roku). W tym roku, na szczęście, uniknięto tego bolesnego wrażenia. Przeciwnie, Roth bardzo silnie opiera swoje badania na wynikach starszego o blisko trzydzieści lat kolegi. Decyzję trudno także uznać za zaskakującą – oba nazwiska pojawiały się na noblowej „giełdzie" od lat, a że Shapley przekroczył dziewięćdziesiątkę, rosła obawa, iż Komitet nie zdąży go uhonorować. Rozstrzygnięcie należy też pochwalić z tego względu, że nagrodzone wyniki to jeden ze stosunkowo niewielu w ekonomii przykładów pozornie abstrakcyjnej, suchej, formalnej, a przy tym wcale niebanalnej teorii, która ma bardzo praktyczne zastosowania.

Czego dotyczą więc badania Shapleya i Rotha (oczywiście, te nagrodzone, bo np. Shapley ma ogromne zasługi w innych obszarach teorii gier)? Ogólnie rzecz biorąc, dotyczą tzw. *matching markets*, a więc sytuacji, w których dwie strony „rynku" mają silne preferencje co do tego, z kim konkretnie po drugiej stronie wejdą w interakcję. Cechy tej **nie** ma np. rynek cebuli – gdy idę na targ, jest mi zasadniczo wszystko jedno, od którego ze sprzedawców ją kupię. Jeśli natomiast zamierzam się ożenić, to, z kim połączy mnie „mechanizm rynkowy", jest absolutnie kluczowe. Podobnie, jeżeli wybieram się na studia, mogę mieć swój porządek uczelni czy poszczególnych kierunków od najlepszych do najgorszych (i porządek ten może być inny dla każdego z kandydatów). Oczywiście, także uczelnie mają swoje listy pożądanych studentów.



W systemie obecnie stosowanym w Polsce może zdarzyć się, że pewną Martę przyjmą na uczelnię $\mathcal{A}$, ale ona wolałaby iść na uczelnię $\mathcal{B}$, lecz na $\mathcal{B}$ znalazła się dopiero na liście rezerwowej. Nie składa więc matury na $\mathcal{A}$, tylko czeka, skutkiem czego $\mathcal{A}$ ją skreśla. Tymczasem nie ma wcale gwarancji, że na $\mathcal{B}$ doczeka się przyjęcia, więc ostatecznie może skończyć np. na uczelni $\mathcal{C}$. Zatem $\mathcal{A}$ zamiast Marty przyjmuje z listy rezerwowej pewnego Jana, choć wolałaby przyjąć Martę, a i Marta wolałaby $\mathcal{A}$ względem $\mathcal{C}$, na której kończy. Co gorsza, może być nawet tak, że $\mathcal{C}$ (stosując inne kryteria niż $\mathcal{A}$) przyjęła tegoż Jana w pierwszym rzucie, ale on wolał np. uczelnię $\mathcal{D}$ i był tam na liście rezerwowej, zatem odrzucił ofertę $\mathcal{C}$ i czekał na $\mathcal{D}$, lecz tam się nie dostał i dlatego właśnie skończył na $\mathcal{A}$! Czyli gdybyśmy zamienili Martę i Jana miejscami, to zarówno oboje zainteresowanych kandydatów, jak i obie uczelnie skorzystałyby na tym!



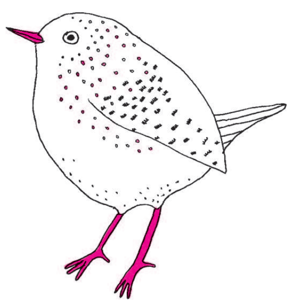
Korzystając z aparatu formalnego stworzonego przez Shapleya, powiemy, że rozwiązanie jest **niestabilne**, a (Marta, $\mathcal{A}$) jest **parą blokującą** – obie strony przedkładałyby bycie połączonymi nad aktualną sytuację (tj. Marta chciałaby zastąpić $\mathcal{C}$ przez $\mathcal{A}$, a $\mathcal{A}$ byłaby gotowa wymienić na Martę Jana, a – być może – także inne przyjęte osoby). Oczywiście, (Jan, $\mathcal{C}$) też jest parą blokującą. Na „rynku" małżeńskim przypadek pary blokującej – preferującej siebie nawzajem wobec aktualnych współmałżonków – potocznie możemy nazwać romansem. Intuicyjnie widać więc, że lepiej, by procedura dawała rozwiązanie stabilne, co podnosi satysfakcję uczestników i pozwala uniknąć kosztownych dostosowań *ex post*; badania faktycznie pokazują, że mechanizmy gwarantujące taką alokację są lepiej oceniane i dłużej pozostają w mocy.

Shapley (we współpracy z Davidem Galem) udowodnił, że rozwiązanie stabilne (a więc takie, w którym nie ma ani jednej pary blokującej) musi istnieć

*Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski

i pokazał, jak go szukać. W szczególności zaproponował **algorytm odroczonej akceptacji**. Gdy skorzystamy z terminologii „rynku” małżeńskiego, jedna z jego wersji polega na tym, że w pierwszej rundzie każdy z panów oświadcza się pani, która jest najwyżej na jego liście akceptowalnych partnerek. Każda z pań „roboczo” przyjmuje oświadczyny tego z jej adoratorów, którego ceni najwyżej (o ile którykolwiek jest do przyjęcia). Każdy odrzucony pan wykreśla z listy preferencji panią, która go odtrąciła, i w kolejnej rundzie mechanizm zostaje powtórzony z tak skróconymi listami. Pan, który wykreśli wszystkie akceptowalne partnerki, przestaje się oświadczać. Mechanizm kończy się, gdy w kolejnej rundzie nikt nie zostanie odtrącony, a „roboczo” przyjęte w niej oświadczyny wyznaczają ostatecznie utworzone pary (przy czym niektórzy mogą pozostać samotni).

Ponieważ w każdej rundzie poza ostatnią przynajmniej jedna pani zostaje skreślona z przynajmniej jednej listy, mechanizm faktycznie doprowadzi do pewnej alokacji w skończonej liczbie kroków. Co istotniejsze, będzie to alokacja stabilna. Przypuśćmy przeciwnie, że pewna para (Piotr, Anna) jest parą blokującą. Oznacza to, że Piotr oświadczył się kiedyś Annie (skoro jest ona wyżej na jego liście niż jego docelowa żona) i został odrzucony (skoro nie są razem). Zauważmy jednak, że mechanizm ten gwarantuje, iż sytuacja każdej z pań z rundy na rundę może się tylko poprawić, bo odrzuca oświadczyny, które przyjęła roboczo w poprzedniej rundzie, tylko jeśli w nowej oświadczył się ktoś atrakcyjniejszy (a nieodrzucone oświadczyny zostaną powtórzone). Stąd wniosek, że Anna daje pierwszeństwo swojemu docelowemu mężowi przed Piotrem, zatem (Piotr, Anna) parą blokującą nie jest. Zauważmy, że w opisanym wyżej polskim systemie przyjęć na studia było inaczej, tj. Marta słusznie żałowała, że odrzuciła była „oświadczyny” $\mathcal{A}$, bowiem ostatecznie zaczęła studia na mniej preferowanej uczelni.



Oczywiście, równie dobrze moglibyśmy rozważać analogiczny mechanizm, w którym oświadczałyby się panie. Na ogół doprowadzi on do innej konfiguracji par. Co ciekawe, Gale i Shapley udowodnili, że mechanizm odroczonej akceptacji jest **najlepszy** dla strony oświadczającej się i **najgorszy** dla drugiej strony. Oznacza to, że w sytuacji, gdy mężczyźni się oświadczają, każdy mężczyzna otrzyma najlepszą z żon, jaką mógłby otrzymać w dowolnym rozwiązaniu stabilnym, a każda kobieta – najgorszego z mężów. Nic dziwnego, że w tradycyjnym społeczeństwie, dającym więcej władzy mężczyznom, to właśnie oni się oświadczali!

Choć akurat scentralizowane rynki doboru w pary małżeńskie mogą budzić nasz sprzeciw, łatwo stwierdzić, że zastosowanie mechanizmu odroczonej akceptacji przy rekrutacji na studia pozwoliłoby uniknąć opisanego wyżej paradoksu, zredukowało obciążenia administracyjne dla uczelni i znacznie przyspieszyło proces rekrutacji – otrzymawszy listy preferowanych uczelni od kandydatów i kryteria doboru (np. wagi poszczególnych przedmiotów maturalnych) od uczelni, dobrze napisany program komputerowy przeprowadziłby opisaną przez nas procedurę w ciągu kilku sekund.

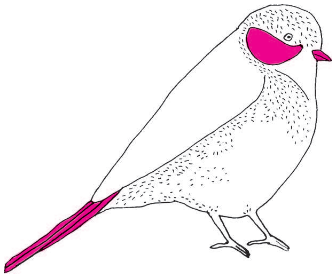
Istotnie, spektakularnym osiągnięciem Rotha są liczne praktyczne zastosowania algorytmów łączenia dwóch stron rynku. Oczywiście, różnica między teorią a praktyką jest taka, że w teorii nie ma różnicy, a w praktyce jest. Przykładowo, implementując algorytmy odroczonej akceptacji do problemu doboru absolwentów szkół medycznych do szpitali w Stanach Zjednoczonych (*National Resident Matching Program*), Roth stanął przed problemem związanym m.in. z parami małżeńskimi, w których preferencje co do szpitali nie były niezależne – małżonkowie woleli na ogół pracować możliwie blisko siebie. W swych pracach teoretycznych Roth pokazał, że tego rodzaju modyfikacje rujnują wspomniane wyniki – w tym przypadku alokacja stabilna może wcale nie istnieć!

Noblista zaproponował jednak pewne (znacznie bardziej skomplikowane niż algorytm odroczonej akceptacji) mechanizmy, które, jak pokazał na podstawie symulacji komputerowych opartych na historycznych danych, prawie zawsze dadzą stabilne rozwiązanie.

Rozwiązanie zadania M 1382. Będziemy zaznaczać liczby w kilku krokach. W kroku 1. w każdym wierszu zaznaczamy najmniejszą liczbę. Jeśli wówczas w każdej kolumnie jest zaznaczona dokładnie jedna liczba, to kończymy. W przeciwnym razie, w kolejnym kroku w każdej kolumnie, w której znajdują się co najmniej dwie zaznaczone liczby, odznaczamy je wszystkie (czyli usuwamy zaznaczenie) oprócz największej. W ten sposób powstały wiersze, w których nie zaznaczono żadnej liczby – nazwijmy je *wierszami wolnymi*. Następnie zaznaczamy w każdym wolnym wierszu najmniejszą liczbę spośród tych, które nigdy wcześniej nie były zaznaczane ani odznaczane. W następnym kroku znowu patrzymy na kolumny, w których są zaznaczone co najmniej dwie liczby, i powtarzamy opisane rozumowanie, aż uzyskamy odpowiednie zaznaczenie lub nie będzie można wykonać kolejnego kroku.

Każdy wiersz może stać się wolny co najwyżej $n-1$ razy, więc wykonamy co najwyżej $n(n-1)+1$ kroków. Po ostatnim kroku w każdej kolumnie będzie zaznaczony dokładnie jeden element.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że w tej procedurze zaznaczono elementy z przekątnej $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ (możemy tak założyć, ewentualnie przestawiając kolumny). Spójrzmy na i-ty wiersz. Jeśli $a_{ik} < a_{ii}$ dla pewnego k, to znaczy, że w pewnym kroku liczba a_{ik} była odznaczona, a zatem $a_{ik} < a_{kk}$.



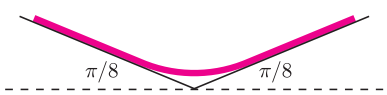
Innym, wdrożonym przez Rotha praktycznym zastosowaniem algorytmów rozważanych wcześniej przez Shapleya, jest problem wymiany nerek do przeszczepu pochodzących od żyjących dawców. Przeszczep nerki jest zbawieniem dla osób cierpiących na ciężką niewydolność tych organów, a człowiek zdrowy może zasadniczo bez trwałej szkody dla zdrowia oddać jedną ze swoich nerek. Niemniej jest to istotne poświęcenie, które większość osób jest gotowa podjąć tylko dla kogoś bliskiego. Niestety, nawet jeśli krewny czy przyjaciel chorego zgodzi się oddać mu swoją nerkę, często okazuje się, że jest ona nieodpowiednia ze względów medycznych, np. pacjentowi o grupie krwi 0 można przeszczepić tylko nerkę pochodzącą od osoby o tejże grupie. Z kolei rynek, na którym można by po prostu kupić stosowną nerkę, większość ludzi uważa za nieetyczny i prawodawstwo niemal wszystkich krajów świata wyklucza takie transakcje. Roth wziął jednak udział w tworzeniu systemów „łańcuchowej” wymiany. W uproszczeniu działają one tak, że np. ktoś gotowy do oddania nerki żonie z niewydolnością, której nie może jednak bezpośrednio pomóc z powodu niewłaściwej grupy krwi, oddaje nerkę na rzecz innej, nieznanej sobie osoby, w chwili gdy z kolei jego żonie pomaga ktoś inny, kto ma krewnego z niewydolnością nerki itd. To chyba rzadki przypadek, gdy badania nagrodzone Noblem, ale wcale nie z medycyny, bezpośrednio ratują ludzkie życie.

Popularna piosenka powiada, że *money makes the world go 'round*. Przesada. Centralnym pojęciem ekonomii jest efektywność, a nie pieniądz. Rynki projektowane przez Rotha świetnie radzą sobie (prawie) bez niego.

Zadania

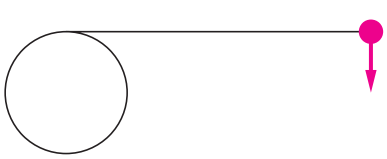
Redaguje Krzysztof TURZYŃSKI

F 829. Jednorodna lina zwisa z dwóch zboczy, z których każde jest nachylone pod kątem $\alpha = \pi/8$ do poziomu (rys. 1). Jaki ułamek całkowitej długości liny może stanowić część wisząca w powietrzu?
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1

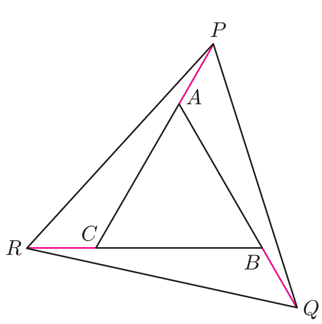
F 830. Poruszające się bez tarcia po lodowisku dziewczę w pewnej chwili chwyta koniec cienkiej liny nawiniętej na słup o przekroju kołowym, przy czym lina jest naprężona i prostopadła do prędkości v_0 dziewczęcia w momencie złapania (rys. 2). Po skończonym czasie dziewczę, przez cały czas kurczowo trzymające się liny, zderza się ze słupem. Jaka jest prędkość dziewczęcia w chwili zderzenia?
Rozwiązanie na str. 17



Rys. 2

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1381. Na półprostych CA, AB, BC, będących przedłużeniami boków trójkąta ABC, obrano odpowiednio punkty P, Q, R, przy czym $AP = BQ = CR$ (rys. 3). Udowodnić, że jeśli trójkąt PQR jest równoboczny, to trójkąt ABC również.
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 3

M 1382. Dana jest tablica $n \times n$ parami różnych liczb rzeczywistych. Udowodnić, że można w niej zaznaczyć n liczb, po jednej w każdym wierszu i kolumnie, w taki sposób, że jeśli w pewnym wierszu zaznaczona liczba jest większa od jakieś innej w tym wierszu, to ta druga liczba jest mniejsza od zaznaczonej liczby z jej kolumny.
Rozwiązanie na str. 7

M 1383. Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych a, b, c jest spełniona nierówność

$$|a-b| + |b-c| + |a+b+c| \geqslant |a| + |b|.$$

Rozwiązanie na str. 15