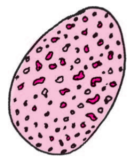
Klub 44

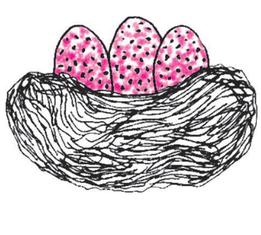


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 645 ($WT = 1{,}15$) i 646 ($WT = 2{,}67$) z numeru 9/2012

Jędrzej Garnek	Poznań	47,73
Roksana Słowik	Knurów	47,20
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Janusz Olszewski	Warszawa	37,87
Paweł Łabędzki	Kielce	36,92
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52

Krzepiące (ostatnio jakoś rzadkie) zjawisko – jednocześnie dwie nowe postacie w Klubie 44 M: pan Jędrzej Garnek oraz pani Roksana Słowik. Panie stanowią (niestety) wyraźną mniejszość wśród uczestników Ligi; tym większa radość, że oto mamy w naszym Klubie już piątą Panią!



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 659, 660

Redaguje Marcin E. KUCZMA

659. Wierzchołki n-kąta foremnego są pokolorowane dwoma kolorami. Co jednostkę czasu pokolorowanie zmienia się: każdy wierzchołek przyjmuje kolor, który bezpośrednio przed tym momentem miała większość z trójki wierzchołków: sam rozważany wierzchołek oraz dwa z nim sąsiadujące. Proces kończy się, gdy nowe pokolorowanie okaże się identyczne z poprzednim (tzn. gdy nic się już nie zmienia). Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyjaśnić, dla jakich początkowych konfiguracji kolorów proces będzie trwał nieskończenie.

660. Dana jest liczba naturalna $k > 1$. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, spełniające nierówność $d(n^k) \leqslant k \cdot d(n)$, gdzie $d(x)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej x.

Zadanie 660 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2012

Przypominamy treść zadań:

651. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (m, n), dla których liczby
$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m} \quad \text{oraz} \quad \frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}$$
są także całkowite.

652. Udowodnić nierówność
$$\frac{a^{n+1}}{a+b} + \frac{b^{n+1}}{b+c} + \frac{c^{n+1}}{c+a} \geqslant \frac{a^n + b^n + c^n}{2}$$
dla liczb rzeczywistych $a, b, c > 0$ oraz liczb całkowitych $n > 0$.

651. Sprowadzenie podanych sum ułamków do wspólnego mianownika pokazuje, że iloczyn mn powinien być dzielnikiem liczb $m^2 + m + n^2 + n$ oraz $m^3 + n^3$. Zatem n ma być dzielnikiem liczb $m^2 + m$ oraz m^3, więc także liczby $m^3 - (m^2+m)(m-1)$, równej m. Przez symetrię, liczba m ma być dzielnikiem liczby n. Dostajemy warunek $|m| = |n|$.

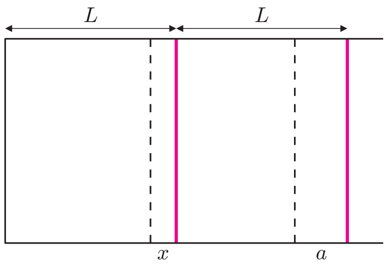
Gdy $m = -n$, podane w zadaniu sumy wynoszą -2 oraz 0 (więc są całkowite). Jeśli zaś $m = n$, wynoszą one odpowiednio $2 + \frac{2}{n}$ oraz $2n$. Są one obie całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $n = \pm 1$ lub $n = \pm 2$.

Otrzymujemy odpowiedź: szukane pary to wszystkie pary postaci $(-n, n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, a ponadto cztery pary $(-2,-2)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(2,2)$.

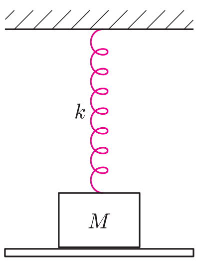
652. Autor zadania, pan Witold Bednarek, przysłał je wraz z takim zmyślnym rozwiązaniem: średnia arytmetyczna układu $2n+1$ liczb, mianowicie $(2n-1)$-krotnie powtórzonej liczby a^{n+1} oraz liczb ab^n, b^{n+1}, jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, równej $a^n b$:
$$(2n-1)a^{n+1} + (a+b)b^n \geqslant (2n+1)a^n b.$$
Do obu stron dodajemy $(2n+1)a^{n+1}$ i po prostym przekształceniu otrzymujemy
$$\frac{a^{n+1}}{a+b} \geqslant \frac{(2n+1)a^n - b^n}{4n}.$$
Wystarczy teraz napisać analogiczne nierówności dla par b, c oraz c, a, po czym dodać te trzy nierówności, by uzyskać tezę zadania.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2013



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 556, 557

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

556. W poziomym cylindrze, w odległościach L i $2L$ na prawo od zamkniętego końca znajdują się dwa tłoki (rys. 1), które mogą przemieszczać się bez tarcia (grubości tłoków pomijamy). W lewej części znajduje się para wodna pod ciśnieniem p_0, w prawej powietrze o takim samym ciśnieniu. Ciśnienie pary nasyconej wody w danej temperaturze wynosi $2p_0$. Prawy tłok został wolno wepchnięty na odległość a. O ile przesunął się lewy tłok? Temperatura jest stała.

557. Detektor fal radiowych znajduje się na brzegu jeziora na wysokości h nad poziomem wody. Rejestruje on sygnały wysyłane przez satelitę wznoszącego się nad horyzontem. Przy jakich kątach wzniesienia satelity nad horyzontem obserwuje się maksima sygnału? Długość fali emitowanej przez satelitę wynosi λ. Przyjmujemy, że powierzchnia jeziora jest idealnie gładka.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2012

Przypominamy treść zadań:

548. Ciężarek o masie M zawieszono na sprężynie o współczynniku sprężystości k i położono na podstawce (rys. 2). W chwili początkowej sprężyna była nieodkształcona. Podstawkę zaczęto opuszczać w dół z przyspieszeniem a. Po jakim czasie ciężarek stracił kontakt z podstawką? Jakie było maksymalne wydłużenie sprężyny?

549. Obwód elektryczny składa się z ogniwa o zaniedbywalnym oporze wewnętrznym i dwóch oporników połączonych szeregowo. Woltomierz wskazał spadek napięcia na pierwszym oporniku $U_1 = 4$ V, na drugim oporniku $U_2 = 6$ V, na obu opornikach $U = 12$ V. Jakie są spadki napięć na każdym z oporników, gdy woltomierz nie jest nigdzie podłączony?

548. Gdy $a \geqslant \mathrm{g}$, czyli przyspieszenie podstawki jest nie mniejsze od przyspieszenia ziemskiego, ciężarek odrywa się od podstawki od razu. Zmiana energii kinetycznej ciężarka po zakończeniu ruchu w dół wynosi 0 i równa jest pracy sił ciężkości i sprężystości: $0 = M\mathrm{g}x_0 - kx_0^2/2$, gdzie x_0 jest maksymalnym wydłużeniem sprężyny i wynosi $2M\mathrm{g}/k$.

Rozważmy przypadek $a < \mathrm{g}$. Równanie ruchu ciężarka, dopóki nie straci on kontaktu z podstawką, ma postać $Ma = M\mathrm{g} - kx - F(x)$, gdzie x jest wydłużeniem sprężyny, a $F(x)$ siłą reakcji podstawki. W chwili oderwania, po przebyciu przez ciężarek drogi s, jest $F(s) = 0$. Stąd $s = M(\mathrm{g} - a)/k$. Z drugiej strony $s = at^2/2$, ponieważ do chwili oderwania ciężarek wraz z deską porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym i szukany czas wynosi $t = \sqrt{2M(\mathrm{g}-a)/ka}$. Prędkość ciężarka w chwili oderwania ma wartość $v = at = \sqrt{2Ma(\mathrm{g}-a)/k}$. Od chwili oderwania ciężarek porusza się ruchem harmonicznym.

Z zasady zachowania energii $k(\Delta l - s)^2/2 + Mv^2/2 = kA^2/2$, gdzie $\Delta l = M\mathrm{g}/k$ jest wydłużeniem sprężyny w stanie równowagi, a $|\Delta l - s|$ jest odległością od położenia równowagi w chwili oderwania, wyznaczamy amplitudę drgań $A = M\sqrt{a(2\mathrm{g}-a)}/k$. Maksymalne wydłużenie sprężyny x_0 jest sumą wydłużenia w położeniu równowagi Δl oraz amplitudy drgań $x_0 = M\mathrm{g}/k + M\sqrt{a(2\mathrm{g}-a)}/k$.

549. Ponieważ opór ogniwa jest zaniedbywalny, suma spadków napięć na obu opornikach równa jest sile elektromotorycznej ogniwa, która wynosi $\epsilon = 12$ V, jak wynika z trzeciego pomiaru. Oznaczmy opór woltomierza przez R_V, a oporników przez R_1 i R_2. Niech natężenie prądu płynącego przez opornik R_2, gdy woltomierz połączony jest równolegle z opornikiem R_1, wynosi I_1. Drugie prawo Kirchhoffa ma w tym przypadku postać $\epsilon - U_1 - R_2I_1 = 0$, stąd $I_1 = (\epsilon - U_1)/R_2$. Spadek napięcia na połączonych równolegle opornikach R_1 i R_V wynosi $U_1 = R_VR_1I_1/(R_V + R_1)$ i prowadzi to do równania $R_2(R_V + R_1) = 2R_VR_1$. Analogicznie rozważając przypadek połączenia woltomierza z opornikiem R_2, otrzymujemy równanie $R_1(R_V + R_2) = R_VR_2$. Eliminacja R_V daje związek $2R_2 = 3R_1$. Gdy woltomierz nie jest podłączony, natężenie prądu w obwodzie wynosi $I = \epsilon/(R_1 + R_2) = 2\epsilon/(5R_1)$. Spadek napięcia na pierwszym oporniku wynosi więc $U_1' = R_1I = 4{,}8$ V, na drugim $U_2' = \epsilon - U_1' = 7{,}2$ V.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 542 ($WT = 2{,}35$) i 543 ($WT = 2{,}45$) z numeru 9/2012

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	39,02
Tomasz Rudny	Warszawa	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,13
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,34