

## Informatyczny kącik olimpijski (61): Czworokąty wypukłe

W tym kąciku zajmiemy się zadaniem *Quadrilaterals* z obozu w Petrozawodsku w 2006 roku. Na płaszczyźnie dane jest  $n$  punktów w położeniu ogólnym (tzn. żadna trójka punktów nie leży na jednej prostej). Należy wyznaczyć liczbę czworokątów wypukłych, których wierzchołki znajdują się wśród podanych punktów.

Aby sprawdzić, czy punkty  $p_0, p_1, p_2, p_3$  mogą być kolejnymi wierzchołkami czworokąta wypukłego w porządku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, wystarczy zbadać, czy każda trójka kolejnych punktów tworzy zakręt w lewo. W tym celu można zbadać znak iloczynu wektorowego:

$$(p_i - p_{(i-1) \bmod 4}) \times (p_{(i+1) \bmod 4} - p_i) > 0.$$

Sprawdzając wszystkie możliwe czwórki uporządkowane, liczbę „dobrych czwórek” możemy wyznaczyć w czasie  $O(n^4)$ . Liczbę czworokątów wypukłych uzyskamy, dzieląc liczbę „dobrych czwórek” przez 4 (bierzemy poprawkę na obroty cykliczne).

Aby otrzymać szybsze rozwiązanie, skorzystamy z pewnego pomyslowego triku. Rozważmy dowolną nieuporządkowaną czwórkę punktów (w położeniu ogólnym) i zastanówmy się, jakie czworokąty można na niej zbudować. W zależności od wzajemnego ustawienia punktów mamy dwa przypadki (patrz rys. 1): albo wszystkie punkty leżą na brzegu otoczki wypukłej (przypadek A), albo trzy punkty leżą na brzegu otoczki wypukłej, a czwarty punkt w środku (przypadek B). Łatwo przekonać się, że w pierwszym przypadku czwórka punktów wyznacza jeden czworokąt wypukły, natomiast w drugim przypadku dostajemy trzy różne czworokąty wklęsłe.

Powiemy, że para punktów  $\{p_1, p_2\}$  tworzy *przecięcie* z parą punktów  $\{q_1, q_2\}$ , jeśli punkty  $q_1, q_2$  leżą po różnych stronach prostej wyznaczonej przez punkty  $p_1, p_2$ . Zauważmy, że czwórka punktów z przypadku A generuje nam dwa przecięcia (gdy za punkty  $p_1, p_2$  weźmiemy przeciwległe wierzchołki czworokąta wypukłego), natomiast w przypadku B są to trzy przecięcia (gdy jeden z punktów  $p_1, p_2$  leży w środku otoczki wypukłej). Niech  $P$  będzie liczbą wszystkich przecięć w zadanym zbiorze  $n$  punktów, natomiast  $a$  i  $b$  będą liczbą czwórek punktów tworzących układy odpowiednio typu A i typu B. Możemy napisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} \binom{n}{4} = a + b \\ P = 2a + 3b \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, dostajemy, że liczba czworokątów wypukłych to  $a = 3\binom{n}{4} - P$  (przy okazji: liczba wszystkich czworokątów to  $a + 3b = 2P - 3\binom{n}{4}$ ).

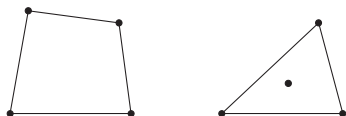
Pozostaje pokazać, jak wyznaczyć liczbę  $P$ . Jeśli dla ustalonej pary punktów  $\{p_1, p_2\}$  dokładnie  $x$  punktów leży po jednej stronie prostej  $p_1p_2$  i  $y$  punktów leży po drugiej stronie tej prostej, to mamy  $x \cdot y$  przecięć zawierających parę  $\{p_1, p_2\}$ . Rozważając każdą taką parę  $\{p_1, p_2\}$  osobno, uzyskujemy czas  $O(n^3)$ .

Szybciej wyznaczmy  $P$ , korzystając z metody zmiatania. Ustalmy punkt  $p_1$  i przesunmy punkty na płaszczyźnie tak, żeby środek układu współrzędnych znalazł się w  $p_1$ . Dla każdego innego punktu  $q$  wyznaczmy kąt  $\alpha(q) \in [0, 2\pi)$ , jaki tworzy *półprosta*  $p_1q$  z osią  $OX$ . Niech  $q_1, \dots, q_{n-1}$  będzie listą tych punktów posortowaną rosnąco względem kątów  $\alpha(q) \bmod \pi$ , czyli względem kątów, jakie tworzy *prosta*  $p_1q$  z osią  $OX$ . Na początku przyjmujemy  $p_2 = q_1$  i wyznaczamy liczby  $x$  i  $y$  punktów, które leżą powyżej i poniżej prostej  $p_1p_2$  (tj. odpowiednio na lewo i na prawo od wektora  $\overrightarrow{p_1p_2}$ ). W każdym kolejnym kroku  $i = 1, \dots, n-2$  zmieniamy punkt  $p_2$  na  $q_{i+1}$  i uaktualniamy  $x$  i  $y$  (patrz rys. 2):

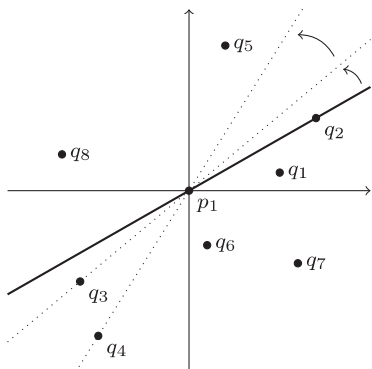
**if**  $\alpha(q_i) < \pi$  **then**  $y := y + 1$  **else**  $x := x + 1$ ;  
**if**  $\alpha(q_{i+1}) < \pi$  **then**  $x := x - 1$  **else**  $y := y - 1$ ;

Ponieważ dla ustalonego punktu  $p_1$  sortowanie zajmie czas  $O(n \log n)$ , a przejście – czas  $O(n)$ , więc cały algorytm wykona się w czasie  $O(n^2 \log n)$ . Uzyskany wynik (sumę iloczynów  $x \cdot y$ ) musimy podzielić przez 2, gdyż interesują nas nieuporządkowane pary punktów  $\{p_1, p_2\}$ .

Formalnie iloczyn wektorowy jest zdefiniowany w przestrzeni trójwymiarowej; w zadaniach z geometrii w dwóch wymiarach zwykle określa się go dla wektorów  $v_1 = [x_1, y_1]$ ,  $v_2 = [x_2, y_2]$  jako liczbę  $x_1y_2 - x_2y_1$ .



Rys. 1. Dwa przypadki położenia nieuporządkowanej czwórki punktów: A (po lewej) i B (po prawej).



Rys. 2. Przejście prostej ze stanu  $(i, x, y) = (2, 2, 5)$  do stanu  $(3, 2, 5)$ , a następnie do  $(4, 3, 4)$ .

Tomasz IDZIASZEK