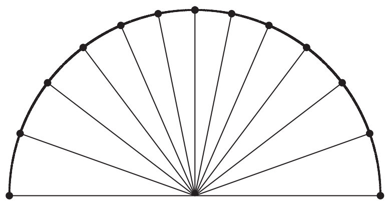
Zegar słoneczny, równania różniczkowe i ładne obrazki

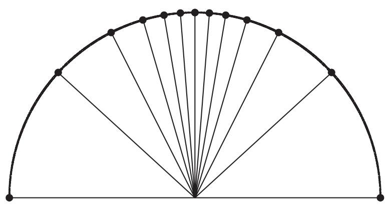
Franciszek ADAMASZEK, Michał ADAMASZEK

Nie od dziś wiadomo, jak zbudować najprostszy zegar słoneczny. Słońce, w swym pozornym ruchu po niebie, porusza się ze stałą prędkością kątową w płaszczyźnie prostopadłej do osi wskazującej północny biegun niebieski. Aby zagwarantować niezależność odczytów od wysokości Słońca nad horyzontem (czyli od pory roku), należy wycelować wskazówkę zegara (gnomon) w Gwiazdę Polarną, czyli pod kątem odpowiadającym lokalnej szerokości geograficznej φ. Jeżeli dodatkowo tarczę zegara umieścimy prostopadle do wskazówki, to cień wskazówki będzie obracał się jednostajnie i kolejne godziny możemy zaznaczać co 15° (oczywiście, mówimy tu o pomiarze lokalnego czasu słonecznego). Więcej w *Delcie* 8/2010.

Jeżeli chcemy, aby cień rzucany był po prostu na powierzchnię Ziemi (zegar horyzontalny), to równomierna podziałka działa tylko na biegunie. O ile w naszych szerokościach geograficznych, dajmy na to w Kętach ($\varphi = 49°53'$), tarcza zegara płaskiego nie wygląda źle (rys. 1), o tyle w Hyderabadzie ($\varphi = 17°37'$) zagęszczenie wokół południa jest już spore (rys. 2). Pogarsza to czytelność zegara w tych godzinach i może prowadzić do nadmiernego rozwleczenia pory lunchu, ze szkodą dla gospodarki.



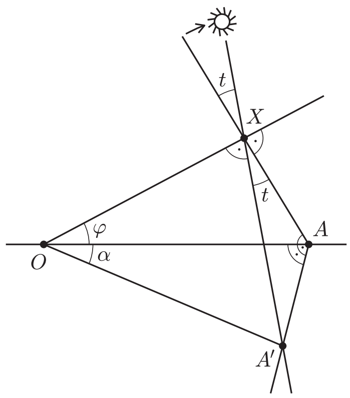
Rys. 1. Tarcza płaskiego zegara w Kętach ($\varphi = 49°53'$). Podziałka co godzinę.



Rys. 2. Tarcza płaskiego zegara w Hyderabadzie ($\varphi = 17°37'$).

Łatwo sprawdzić, dlaczego tak jest. Ustalmy dla uproszczenia rachunków, że lokalne południe wypada w chwili $t = 0$, a lokalna godzina 18:00 w chwili $t = \frac{\pi}{2}$ (to znaczy mierzymy czas prędkością kątową Słońca). Z rysunku 3 widzimy, że przesunięciu Słońca po niebie o kąt t odpowiada obrót cienia o kąt $\alpha(t)$, przy czym

$$\operatorname{tg}\alpha(t) = \frac{AA'}{OA} = \frac{XA}{OA}\cdot\frac{AA'}{XA} = \sin\varphi\cdot\operatorname{tg} t. \tag{1}$$



Rys. 3. Zmiana kąta w zegarze płaskim po obrocie Słońca o kąt t.

Jeśli więc $\varphi = 90°$ (biegun północny), to $\alpha(t) = t$, czyli cień obraca się jednostajnie i w zegarze poziomym można użyć równomiernej podziałki. Gdy kąt φ maleje, spada także $\sin\varphi$, a przez to kąt $\alpha(t)$ zmienia się niejednostajnie wraz z t.

Ten efekt (lub defekt) można rekompensować, manipulując kształtem tarczy. Umówmy się, że godzinę odczytujemy na przecięciu cienia z krzywą wyznaczającą brzeg zegara. Najbardziej wymagający esteta (na przykład jeden z autorów tego tekstu) mógłby chcieć, aby pomiędzy każdymi dwiema chwilami $t_1 < t_2$ kraniec cienia pokonywał fragment tej krzywej o długości proporcjonalnej do $t_2 - t_1$. Powinno to pomóc rozładować lokalne „zagęszczenia”. Skoro pokonywana droga ma być proporcjonalna do czasu, to punkt odczytu musi przemieszczać się ze stałą prędkością. Wkraczamy tu w obszar geometrii różniczkowej krzywych. Jeżeli punkt przemieszcza się po płaszczyźnie tak, że w chwili t znajduje się w punkcie $(x(t), y(t))$, to jego prędkość w chwili t ma wartość

$$v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2},$$

co wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do prędkości w kierunkach OX (u nas zachód-wschód) i OY (południe-północ). Wiemy już, że w chwili t obwiednia każdego zegara musi przechodzić przez punkt odchylony od osi OY o kąt $\alpha(t)$, w takim razie jest opisana parametryzacją

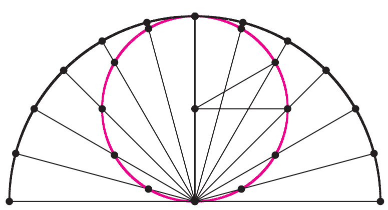
$$t \mapsto (r(t)\sin\alpha(t), r(t)\cos\alpha(t)).$$

Warunek stałej prędkości przyjmuje postać

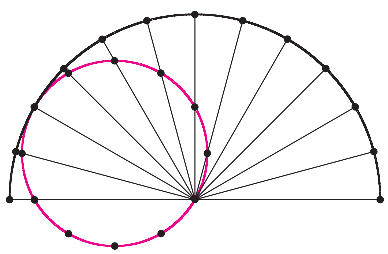
$$(r(t)\sin\alpha(t))'^2 + (r(t)\cos\alpha(t))'^2 = \text{const}.$$

Zakładając, bez straty ogólności, że const = 1, dochodzimy do równania

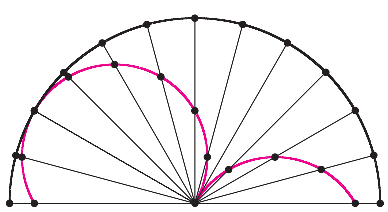
$$r'(t)^2 + r(t)^2\alpha'(t)^2 = 1.$$



Rys. 4. Inna tarcza zegara na biegunie.



Rys. 5. Kolejna tarcza na biegunie…



Rys. 6. … i jej poprawiona wersja.

Czytelnicy zaznajomieni z zasadami różniczkowania funkcji trygonometrycznych mogą wyprowadzić z równania (1) wzór na $\alpha'(t)$, za pomocą którego dostaniemy ostatecznie równanie różniczkowe na promień $r(t)$:

$$r'(t)^2 + \frac{r(t)^2}{(\cos^2 t + \sin^2\varphi \sin^2 t)^2} = 1. \tag{2}$$

Zanim wrócimy do Kęt i Hyderabadu, zatrzymajmy się nad tym równaniem na biegunie. Wtedy $\varphi = 90^\circ$ i szukamy funkcji $r(t)$, dla której

$$r'(t)^2 + r(t)^2 = 1.$$

Taką własność ma niewątpliwie funkcja stała $r(t) = 1$, co daje omawiany już zegar biegunowy o tarczy w kształcie okręgu. Nie jest to jednak jedyna możliwość! Możemy, na przykład, wziąć $r(t) = \cos t$, otrzymując krzywą $t \mapsto (\cos t \sin t, \cos^2 t)$. Jest ona przedstawiona na rysunku 4 wraz z punktami, w których wypadał będzie cień w kolejnych pełnych godzinach. Jest to w istocie okrąg o środku $S = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (proszę sprawdzić!). Co więcej, mogliśmy dokonać tego odkrycia, używając elementarnej geometrii (choć jeden z autorów tego tekstu nigdy by się o to nie podejrzewał). Wyjaśnienie znajduje się także na rysunku 4: skoro kąt wpisany zmienia się ze stałą prędkością, to także kąt środkowy zmienia się ze stałą, dwa razy większą prędkością, a więc punkt odczytu czasu obiega S jednostajnie. Możemy też wziąć dowolną kombinację

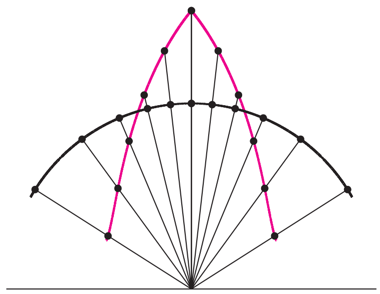
$$r(t) = a\cos t + b\sin t, \quad a^2 + b^2 = 1. \tag{3}$$

Krzywe opisane tego typu promieniem to okręgi przechodzące przez punkt $(0,0)$, jak na rysunku 5. Praktyczna przydatność takiego zegara stoi pod znakiem zapytania, bo niektóre godziny wskazuje nie sam cień, a raczej jego niewidoczne przedłużenie w przeciwną stronę od początku układu. Można temu zaradzić, biorąc symetryczne odbicie odpowiedniego fragmentu, co daje krzywą o stałej prędkości, ale nie wszędzie gładką (rys. 6). Może jednak na biegun lepiej zabrać bardziej nowoczesny czasomierz.

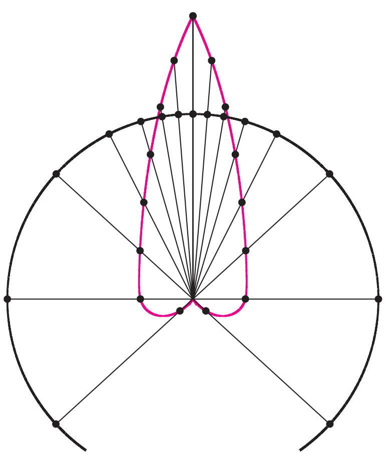
To już wszystkie rozwiązania równania (2). Niekompletny szkic dowodu, którego szczegóły zainteresowany Czytelnik może uzupełnić we własnym zakresie, jest następujący: skoro $r'(t)^2 + r(t)^2 = 1$ to, różniczkując, dostajemy $2r''(t)r'(t) + 2r'(t)r(t) = 0$, a więc $r'(t)(r''(t) + r(t)) = 0$. W takim razie albo $r'(t) = 0$ i $r(t)$ jest stałą, albo $r''(t) = -r(t)$, a wtedy $r(t)$ musi być postaci (3).

Wróćmy do szerokości geograficznych o nieco cieplejszym klimacie. Dla dowolnego φ równanie (2) jest bardziej skomplikowane i autorzy nie znają żadnego jawnego wzoru na jego rozwiązanie $r(t)$ (może ktoś z Czytelników?). Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, aby znaleźć rozwiązanie numerycznie lub przybliżyć je eksperymentalnie, na przykład łamaną o stałej odległości między każdymi dwiema pełnymi godzinami. Możemy manipulować początkową wartością promienia $r(0)$. Gdy zaczniemy zbyt daleko od początku układu, rozwiązanie może istnieć tylko przez pewien czas, a potem krzywa nie będzie miała wystarczającego zapasu prędkości, aby nadążyć za coraz szybciej uciekającym cieniem (rys. 7). Poniżej pewnej krytycznej wartości rozwiązanie równania istnieje bardzo długo, aż do godzin nocnych, gdy Słońca już dawno nie widać. Mamy też swobodę w łączeniu kilku gładkich fragmentów, jak w przykładzie na biegunie. Kilka ładnych zegarów o stałej prędkości cienia po brzegu tarczy przedstawionych jest na rysunkach 8–10.

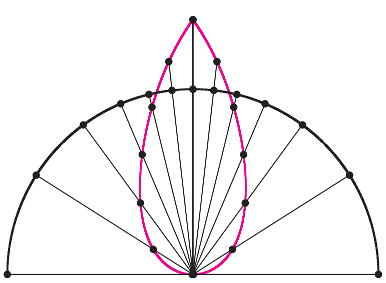
Jedne z bardziej efektownych zegarów słonecznych znajdują się na budynkach, a więc na pionowych ścianach, i to niekoniecznie zwróconych na południe. Zainteresowanym Czytelnikom polecamy przeniesienie naszej konstrukcji np. na ścianę swojego domu.



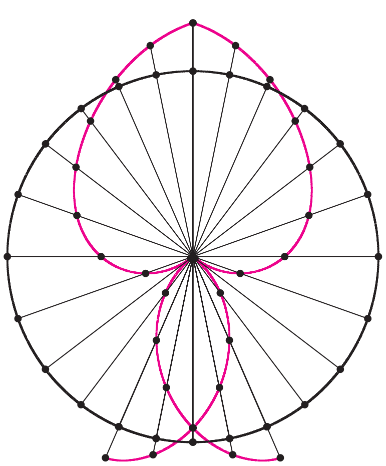
Rys. 7. Utrzymując stałą prędkość, nie uda się „dociągnąć” do godziny szóstej.



Rys. 8. Przykład zegara w Hyderabadzie...



Rys. 9. ... w Luksorze...



Rys. 10. ... i w Kętach.