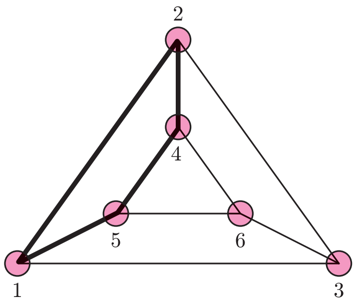

Tym razem $x_{1,5} \neq 0$, $x_{1,2} \neq 0$, $x_{2,4} \neq 0$ oraz $x_{4,5} \neq 0$. Podgraf H składa się z trzech składowych – jednego podgrafu 2-regularnego i dwóch podgrafów trywialnych (wierzchołków izolowanych). Ponadto $\deg(1, H) = 2$ i $\deg(5, H) = 2$.

spostrzeżenie, że wystarczy znaleźć nietrywialny podgraf H (lub równoważnie liczby $x_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$, nie wszystkie zerowe), którego każdy wierzchołek ma stopień podzielny przez p (czyli $p \mid \deg(i, H)$). Dlaczego? Nietrywialny podgraf H ma nietrywialną spójną składową. Nietrywialna spójna składowa takiego H będzie właśnie szukanym p-podgrafem: $p \mid \deg(i, H)$ i $\deg(i, H) \leqslant 2p - 1$, więc $\deg(i, H)$ jest równy 0 lub p, ale w tej nietrywialnej spójnej składowej każdy wierzchołek będzie miał stopień p, bo wierzchołki stopnia 0 są izolowane.

Udało nam się sprowadzić nasz problem do rozwiązania układu równań diofantycznych

$$\deg(i, H) \equiv \sum_{v \in G,\, (i,v) \in E} x_{i,v}^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Tych wielomianów jest $|G|$, każdy ma stopień $p - 1$ i zależy od zmiennych $x_{i,j}$ (dla wszystkich i, j połączonych krawędzią w G). Suma stopni tych wielomianów jest równa $(p - 1)|G|$. Liczba zmiennych jest taka sama jak liczba krawędzi w G, czyli $\frac{1}{2}(2p - 1)|G|$ (każdy wierzchołek G ma stopień $2p - 1$ i każda krawędź ma dwa końce) – to więcej niż $(p - 1)|G|$. Ponieważ ten układ równań diofantycznych ma trywialne rozwiązanie oraz $p > 1$, więc z twierdzenia Chevalleya–Warninga istnieje szukane rozwiązanie nietrywialne.

Powyższe twierdzenie zostało także udowodnione dla p będącego potęgą liczby pierwszej, ale do tej pory nie wiadomo, czy jest ono prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej. Łącząc otrzymany przez nas rezultat z argumentami kombinatorycznymi, można wykazać, że dla $k \geqslant 4r$ każdy k-regularny graf bez pętelek zawiera podgraf r-regularny.

Czytelników zainteresowanych tematem zachęcam do zajrzenia do pracy Nogi Alona *Combinatorial Nullstellensatz*, która była moją inspiracją do napisania tego artykułu. Praca ta została wydrukowana w 8. numerze czasopisma *Combinatorics, Probability and Computing*, jest też dostępna na stronie internetowej autora. Można w niej znaleźć dowody różnych twierdzeń kombinatorycznych i tych dotyczących addytywnej teorii liczb.

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że nie przypadkiem udało nam się opisać zagadnienie kombinatoryczne za pomocą układu równań diofantycznych. Można udowodnić metatwierdzenie, że każdy skończony problem kombinatoryczny (np. dotyczący grafów) można sprowadzić do rozwiązania pewnego równania diofantycznego modulo p (formalnie, każdy podzbiór w $\mathbb{Z}_p^n$ jest zbiorem zer pewnego wielomianu). Niestety, rozwiązanie takiego równania diofantycznego jest prawie zawsze dużo trudniejsze niż rozwiązanie zagadnienia, od którego wyszliśmy.

Zdegenerowany trójkąt

Sensacyjna (i słaba naukowo) powieść Dana Browna *Anioły i demony* rozpoczyna się wątkiem zamordowania Leonarda Vetry, księdza i fizyka, którego celem było naukę „doprowadzić do tego, by potwierdzała istnienie Boga” oraz „udowodnienie, że zdarzenia opisane w Księdze Rodzaju były możliwe”. W swej najnowszej książce pt. *Filozofia przypadku* Michał Heller, także ksiądz i fizyk, jawi się jako przeciwieństwo tej postaci.

Chociaż podstawowym tematem książki jest, jak wskazuje tytuł, pojęcie przypadku, na drugim planie czai się pytanie, które od lat jest przyczyną gorących debat. Skąd się bierze ewolucja od prostszych do bardziej skomplikowanych struktur (biologiczna lub kosmiczna) i jak interpretować prawa nią rządzące?

Michał Heller wskazuje we wstępie do *Filozofii przypadku* na krańce mapy możliwych opinii w tej kwestii. Przywołuje nazwiska Richarda Dawkinsa, wybitnego propagatora teorii ewolucji, dla którego występujący w jej sformułowaniu czynnik przypadkowości w pewnym momencie zaczął stanowić argument na rzecz radykalnego ateizmu, oraz Williama Dembskiego, jednego z twórców tzw. inteligentnego projektu, czyli koncepcji, że w przyrodzie można znaleźć gdzieniegdzie nieredukowalną złożoność, świadczącą o ingerencji Stwórcy w proces kształtowania się życia. Choć Heller tego nie czyni w systematyczny sposób, ciekawe jest poszukać na tej mapie stanowisk wyrażanych przez kościoły. Na przykład, w dokumentach polskiego Episkopatu znajdujemy opinię, iż „pewne środowiska ateistyczne usiłują zastępować chrześcijańską naukę o stworzeniu ideologicznym, materialistycznym ewolucjonizmem [...] od głoszenia »przypadku« jako źródła wszystkiego, co istnieje, przez przyjęcie »ślepych sił natury« [...] jako wyłącznych sił sprawczych w procesach ewolucyjnych” (stanowisko Rady Naukowej Konferencji Episkopatu Polski, 2006).

We wszystkich wzmiankowanych stanowiskach słowo „przypadek” jest wyraźnie przeciwstawione czynnikom racjonalnym, determinizmowi, czy zgoła planowemu działaniu. *Filozofia przypadku* poświęcona jest przede wszystkim „odczarowaniu” tego słowa. Obecność powyższego rozumienia przypadku w filozofii i teologii jest, zdaniem Hellera, niechlubną spuścizną po Arystotelesie, ignorującą powstanie i rozwój rachunku prawdopodobieństwa oraz teorii układów dynamicznych jako dojrzałych i ważnych gałęzi matematyki. By nie być gołosłownym, historii tych dziedzin wiedzy autor przypatruje się uważnie przez sporą część książki. Ta podróż przez wieki i idee przygotowuje czytelnika na tezę wyrażoną w ostatniej części książki: z punktu widzenia fizyka układy podlegające ewolucji (obserwowalna część Wszechświata, organizm żywy) należy modelować jako otwarte, nieliniowe układy dynamiczne (być może nawet deterministyczne!), których stan może się niekiedy znacznie zmieniać w wyniku oddziaływania z fluktuacją środowiska.

Dla Hellera możliwość wyrażenia i studiowania praw przyrody w języku matematyki i fizyki wskazuje na istnienie Wielkiej Kosmicznej Matrycy realizującej to, co Einstein nazwał Zamysłem Boga. Jeśliby jednak odrzucić niewymagane przez przyrodę interpretacje, okaże się, że poglądy Hellera lokują się bardzo blisko analogicznie odfiltrowanych poglądów Dawkinsa. Skromnie wydana, lecz ciekawie udokumentowana i niezwykle wciągająca książka okazuje się zatem aktem nieomal wywrotowym.

K. T.

M. Heller, *Filozofia przypadku*, Copernicus Center Press, Kraków 2012.