Obroty kwadratów

Joanna JASZUŃSKA

W większości poniższych zadań przydatne są obroty kwadratu wokół jego środka lub jednego z wierzchołków. Wszystkie zadania mają ten sam początek:

Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ o boku 1, przy czym…

1. … $BE = CF$. Udowodnij, że $\sphericalangle EBF + \sphericalangle EAF + \sphericalangle EDF = 90^\circ$ (rys. 1).

2. … $\sphericalangle EAF = 45^\circ$. Wykaż, że $BE + DF = EF$.

3. … obwód trójkąta CFE równy jest 2. Wyznacz miarę kąta EAF.

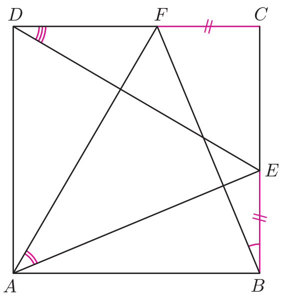
4. … $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAB$. Wykaż, że $BE + DF = AF$.

5. … $\sphericalangle EAF = 45^\circ$. Oblicz wysokość trójkąta EAF poprowadzoną z wierzchołka A.

6. … $\sphericalangle EAF = 45^\circ$. Proste AE i AF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach M i N. Proste EN i FM przecinają się w punkcie K. Wykaż, że proste AK i EF są prostopadłe.

7. … prosta EF jest styczna do okręgu o środku A i promieniu 1. Proste AE i AF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach M i N. Udowodnij, że punkty C, E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

8. … $CE = CF$. Punkt L to rzut punktu C na prostą BF. Wykaż, że $\sphericalangle ALE = 90^\circ$.



Rys. 1

Rozwiązania niektórych zadań

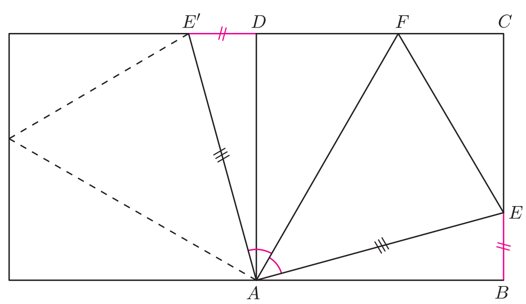
Obroty mierzymy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

R1. Obróćmy kwadrat o 90° wokół środka. Obrazem trójkąta BAE jest trójkąt CBF, zatem $\sphericalangle EBF = \sphericalangle BAE$. Analogicznie $\sphericalangle EDF = \sphericalangle FAD$. Stąd $\sphericalangle EBF + \sphericalangle EAF + \sphericalangle EDF = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAF + \sphericalangle FAD = \sphericalangle BAD = 90^\circ$. $\square$

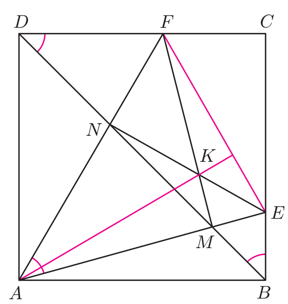
R2. Obróćmy kwadrat o 90° wokół wierzchołka A (rys. 2), niech E' będzie obrazem punktu E. Wtedy $AE \perp AE'$, zatem

$$\sphericalangle E'AF = \sphericalangle E'AE - \sphericalangle EAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \sphericalangle EAF.$$

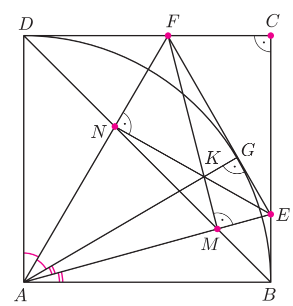
Ponadto $AE = AE'$, więc $\triangle E'AF \equiv \triangle EAF$, bo trójkąty te mają dodatkowo wspólny bok AF. Stąd $EF = E'F = DE' + DF = BE + DF$. $\square$



Rys. 2



Rys. 3

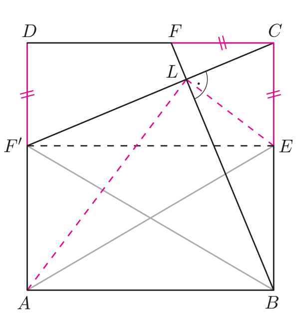


Rys. 4

R5. Z rozwiązania zadania 2 (rys. 2) wiemy, że $\triangle E'AF \equiv \triangle EAF$. Wysokości tych trójkątów poprowadzone z wierzchołka A są więc obie równe AD, czyli 1. $\square$

R6. Punkty A, M, F, D leżą na jednym okręgu, bo $\sphericalangle MAF = 45^\circ = \sphericalangle MDF$ i punkty A, D leżą po tej samej stronie prostej MF (rys. 3). Kąt ADF jest prosty, więc AF jest średnicą tego okręgu. Stąd $\sphericalangle AMF = 90^\circ$, zatem FM jest wysokością trójkąta AEF. Analogicznie EN jest wysokością tego trójkąta, więc K to jego ortocentrum. Wobec tego AK, jako trzecia wysokość, jest prostopadła do EF. $\square$

R7. Niech G będzie punktem styczności prostej EF do danego okręgu. Wtedy $AG \perp EF$, $EG = EB$ oraz $FG = FD$ (rys. 4), zatem $\triangle ABE \equiv \triangle AGE$ oraz $\triangle ADF \equiv \triangle AGF$. Stąd $\sphericalangle EAF = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 45^\circ$. Na mocy rozwiązania zadania 6 wiemy więc, że $\sphericalangle EMF = \sphericalangle ENF = 90^\circ$. Stąd wniosek, że punkty M i N leżą na okręgu o średnicy EF. Leży na nim też punkt C, bo $\sphericalangle ECF = 90^\circ$. $\square$



Rys. 5

R8. Obróćmy kwadrat o 90° wokół środka. Obrazem punktu F jest taki punkt F' na boku AD, że $DF' = CF = CE$ (rys. 5). Obrazem prostej BF jest prosta CF', jest ona prostopadła do BF, więc zawiera punkt L. Opiszmy okrąg na prostokącie $ABEF'$; jego średnicą jest BF'. Punkt L leży na tym okręgu, ponieważ kąt BLF' jest prosty. Średnicą okręgu jest także AE, więc również kąt ALE jest prosty. $\square$

Zadanie 5 pochodzi z XLIII Olimpiady Matematycznej.