Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

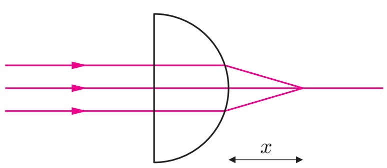
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2013

Zadania z fizyki nr 554, 555

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

554. Wzdłuż gumowego sznura o długości l i współczynniku sprężystości k zsuwa się w kierunku pionowym żelazny pierścień o masie m. Siła tarcia między powierzchnią sznura a pierścieniem wynosi T. Wyznacz ciepło, które się przy tym wydziela.

555. Wąska wiązka światła po przejściu przez półkulę ze szkła o współczynniku załamania n skupia się w odległości x od powierzchni wypukłej (rys. 1). W jakiej odległości od powierzchni płaskiej skupią się promienie, jeżeli wiązkę światła przepuścimy przez półkulę z drugiej strony?



Rys. 1

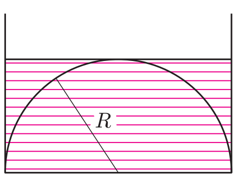
Rozwiązania zadań z numeru 11/2012

Przypominamy treść zadań:

546. Do naczynia w kształcie półsfery o promieniu R, szczelnie przylegającego do podłoża, zaczęto nalewać wodę przez otwór u góry. Gdy woda wypełniła całe naczynie, podniosła je i zaczęła wyciekać z dołu. Jaka jest masa naczynia? Gęstość wody wynosi ρ.

547. Jednakowe masy wodoru i helu umieszczono w naczyniu o objętości V_1. Naczynie to oddzielone jest od pustego naczynia o objętości V_2 przegrodą, która przepuszcza wodór, natomiast nie przepuszcza helu. Po ustaleniu się równowagi ciśnienie w pierwszym naczyniu zmalało dwukrotnie. Jaki jest stosunek V_2/V_1? Temperatura jest stała.

546. Sposób I. Wypadkowa siła nacisku, jaką naczynie i woda wywierają na podłoże, równa jest sumie ich ciężarów. Gdy woda zaczyna wyciekać, naczynie nie wywiera już nacisku i ciężar układu równy jest sile parcia P wody na podłoże: $P = \pi R^2 \rho \mathrm{g} R$ oraz $P = M\mathrm{g} + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho \mathrm{g}$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, a M szukaną masą naczynia: $M = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho$.



Rys. 2

Sposób II. Rozważmy warstwę wody o wysokości R w cylindrycznym naczyniu o tym samym promieniu i półsferyczną powierzchnię również o promieniu R wewnątrz tej warstwy (rys. 2). Zgodnie z prawem Pascala ciśnienia zewnętrzne i wewnętrzne, wywierane przez wodę na powierzchnię w kształcie półsfery, są takie same. Wynika stąd, że masa naczynia równa jest masie dolanej wody: $M = (\pi R^2 R - \frac{2}{3}\pi R^3)\rho = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho$.

547. Oznaczmy przez $p_{\mathrm{H_2}}$ i p_{He} ciśnienia cząstkowe wodoru i helu w chwili początkowej, przez $\mu_{\mathrm{H_2}}$ i μ_{He} ich masy molowe, a jednakowe masy obu gazów przez m. Z równań Clapeyrona wynika, że stosunek ciśnień cząstkowych wynosi $p_{\mathrm{He}}/p_{\mathrm{H_2}} = \mu_{\mathrm{H_2}}/\mu_{\mathrm{He}} = 0{,}5$. Ciśnienie całkowite p jest sumą ciśnień cząstkowych: $p = p_{\mathrm{H_2}} + p_{\mathrm{He}}$. Stan równowagi nastąpi, gdy liczba cząsteczek wodoru w jednostce objętości po obu stronach przegrody będzie taka sama, a tym samym jednakowe będą ciśnienia wodoru $p'_{\mathrm{H_2}}$ w obu naczyniach. Oznaczając przez m_1 i m_2 masy wodoru w pierwszym i drugim naczyniu w stanie końcowym ($m = m_1 + m_2$), z równań Clapeyrona otrzymujemy: $m_1/m_2 = V_1/V_2$.

Z treści zadania wiemy, że po ustaleniu się równowagi ciśnienie w pierwszym naczyniu zmalało dwukrotnie: $0{,}5(p_{\mathrm{He}} + p_{\mathrm{H_2}}) = p_{\mathrm{He}} + p'_{\mathrm{H_2}}$, stąd (uwzględniając, że $p_{\mathrm{H_2}} = 2p_{\mathrm{He}}$) mamy $p_{\mathrm{He}} = 2p'_{\mathrm{H_2}}$. Korzystając ponownie z równań Clapeyrona dla helu w pierwszym naczyniu i wodoru w drugim, otrzymujemy

$$\frac{m}{\mu_{\mathrm{He}} V_1} = \frac{2m_2}{\mu_{\mathrm{H_2}} V_2},$$

zatem

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4V_1}{V_2} - 1.$$

Porównanie wyrażeń na stosunek mas wodoru w obu naczyniach daje ostateczny wynik: $V_2/V_1 = 3$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2013

Zadania z matematyki nr 657, 658

Redaguje Marcin E. KUCZMA

657. W okienka tabeli prostokątnej, mającej m kolumn i n wierszy, wpisujemy liczby 0 lub 1 tak, by w każdym kwadracie 2×2, złożonym z czterech pól mających wspólny wierzchołek, suma czterech wpisanych liczb była nieparzysta. Dla zadanej liczby naturalnej $m \geqslant 2$ znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których da się w taką tabelę wpisać zera i jedynki w opisany sposób tak, by żadne dwa wiersze nie były identyczne.

658. W przestrzeni dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a oraz dowolny punkt P. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu P od wierzchołków czworościanu. Wykazać, że

$$\left(a^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2\right)^2 = 4\left(a^4 + d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4\right).$$

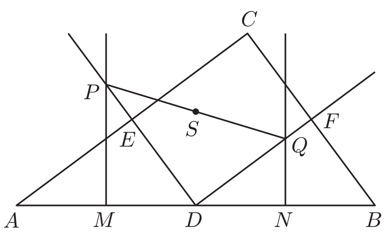
Zadanie 658 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2012

Przypominamy treść zadań:

649. W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Dowieść, że prosta AB jest styczna do okręgu, którego średnica łączy środki okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD.

650. Dane są liczby naturalne n oraz k ($2 \leqslant k \leqslant n$). Wyznaczyć maksymalną liczbę wież, które można ustawić na szachownicy o rozmiarach $n \times n$ tak, by wśród dowolnie wybranych k wież były dwie, które się wzajemnie atakują (przyjmujemy, że *atakują się wzajemnie* każde dwie wieże, stojące w tym samym rzędzie poziomym lub pionowym, niezależnie od tego, czy są pomiędzy nimi jeszcze jakieś inne wieże).



649. Oznaczmy środki okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD odpowiednio przez P, Q. Niech E, F, M, N, S będą kolejno środkami odcinków AC, BC, AD, BD, PQ. Proste PM, QN to symetralne odcinków AD, BD; proste PE, QF to symetralne odcinków AC, BC – przecinają się prostopadle w punkcie D. Okrąg o średnicy PQ przechodzi więc przez punkt D. Ma on środek w punkcie S.

Punkt D jest środkiem odcinka MN. Zatem prosta SD jest równoległa do prostych PM i QN. Prosta AB jest do nich prostopadła. Wobec tego promień SD okręgu (PQD) jest prostopadły do AB. To znaczy, że ów okrąg jest styczny do prostej AB.

650. Bez trudu da się ustawić $n(k-1)$ wież w żądany sposób; wystarczy zapełnić nimi prostokąt $n \times (k-1)$. Pokażemy, że więcej się nie da.

Przyjmijmy, że na szachownicy stoi N wież. Niech m będzie największą liczbą wież, jakie można wybrać spośród nich, by żadne dwie się nie atakowały. Należy dowieść, że jeśli $N > n(k-1)$, to $m > k-1$. Wystarczy wykazać, że $N \leqslant nm$.

Ustalmy więc układ m wież, z których żadne dwie nie stoją w jednym wierszu ani jednej kolumnie. Permutując wiersze i kolumny, można przyjąć, że te wieże stoją na polach $(1,1), (2,2), \ldots, (m,m)$. Podzielmy szachownicę na cztery obszary $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, gdzie A jest kwadratem $m \times m$ (na jego przekątnej stoją wybrane wieże), B i C to prostokąty $m \times (n-m)$ oraz $(n-m) \times m$, zaś D to kwadrat $(n-m) \times (n-m)$. Wobec maksymalności m, żadna wieża nie znajduje się w obrębie kwadratu D.

Weźmy teraz dowolne pole (i,j) w prostokącie B ($i \leqslant m < j$) i symetryczne do niego pole (j,i) w prostokącie C. Gdyby na obu tych polach stały wieże, to usuwając z poprzednio ustalonego układu wieżę z pola (i,i) oraz dołączając wieże z pól (i,j), (j,i), otrzymalibyśmy układ $m+1$ wież, stojących w różnych wierszach i kolumnach – wbrew maksymalności m. Zatem co najwyżej połowa pól w sumie prostokątów B i C jest zajęta, czyli nie więcej niż $m(n-m)$ pól. Uwzględniając m^2 pól kwadratu A, uzyskujemy oczekiwane oszacowanie: $N \leqslant m^2 + m(n-m) = nm$.

Rozwiązanie zadania F 827.
Załóżmy, że na krowie zgromadzony jest ładunek Q. Wytwarza on pole elektryczne o natężeniu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

gdzie r jest odległością od środka krowy. Gęstość energii pola elektrycznego wyraża się wzorem

$$u = \frac{1}{2\epsilon_0}E^2,$$

skąd obliczamy całkowitą energię pola, równą

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

(dla $R \to 0$ otrzymujemy znany problem nieskończonej energii ładunku punktowego). Skoro krowa jest elementarna, to z zasady ekwipartycji energii „należy się” jej $\frac{1}{2}kT$ na każdy stopień swobody. Dla ruchu dwuwymiarowego otrzymujemy więc $Q = \sqrt{8\pi\epsilon_0 kT \cdot R}$, co dla $R = 1\,\mathrm{m}$ i $T = 300\,\mathrm{K}$ daje $Q \approx 6 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}$, czyli kilka tysięcy ładunków elementarnych.