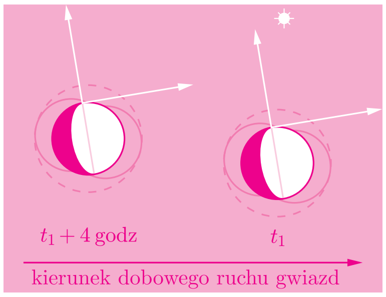
ostatecznie otrzymamy

$$(2)\qquad D = 2R_Z \cos\varphi \sin\left(\frac{1}{2}\omega_Z \Delta t\right) \cos\left(\omega_Z \left(t_g - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)\right)\right).$$

Podstawiając obliczone ze wzorów (1) i (2) wielkości π oraz D do zależności $r = D/\pi$, uzyskujemy szukaną odległość do Księżyca.



Rys. b. Przykład przybliżonej oceny położenia Księżyca w oparciu o jeden bliski, jasny obiekt. Linią przerywaną narysowane są okręgi informujące o wielkości błędu lokalizacji tarczy Księżyca.

Względna dokładność wyznaczenia kątów ε i $\Delta\delta$ będzie tym większa, im dłuższy będzie odstęp czasu Δt między obserwacjami. Wzrostowi dokładności sprzyjała będzie również sytuacja, gdy Księżyc będzie położony w pobliżu jasnych gwiazd lub planet. Minimalnym wymogiem byłby jeden jasny obiekt w odległości nieprzekraczającej średnicy pola widzenia lornetki. W tym przypadku do zbudowania układu odniesienia pozwalającego ocenić przesunięcie Księżyca względem obiektu należy wykorzystać dwa dowolne punkty na tarczy Księżyca lub przynajmniej jego rogi (rys. b). Rezultatem obserwacji powinno być zaznaczenie na rysunku lub mapie dwóch położeń Księżyca względem gwiazd, zanotowanie chwil t_1 i t_2 dokonania tych lokalizacji oraz zaznaczenie kierunku ruchu obserwatora.

Jeśli zdarzy się tak, że w pobliżu Księżyca znajdzie się jasna gwiazda lub jedna z jasnych planet (np. Wenus, Mars, Jowisz, Saturn), a okres Δt nie będzie krótszy niż cztery godziny, to oceny przesunięcia Księżyca będzie można dokonać nawet bez korzystania z lornetki. Sytuację taką należy potraktować jak zaproszenie do naukowej zabawy (jej rezultat będzie bowiem tylko grubym oszacowaniem odległości). Obserwacja polegała będzie na zapamiętaniu położenia Księżyca względem jasnego obiektu w chwili t_1 i porównaniu go z położeniem w chwili t_2. Zaobserwowane w ten sposób przesunięcie kątowe ε najlepiej będzie określać jako wielokrotność średnicy Księżyca, a następnie wyrazić je w radianach, przyjmując na średnicę tarczy wartość $0{,}5^\circ \approx 0{,}0087$ rad. Gdy zatem, Drogi Czytelniku, zobaczysz w pobliżu Księżyca jasny obiekt, to – dla ułatwienia pamięciowych rachunków – możesz przyjąć, że kątowa średnica Księżyca jest równa 0,01 rad, $\omega_K \approx 0{,}01$ rad/h, zaniedbać $\Delta\delta$ oraz pamiętać, że w ciągu godziny Ziemia przenosi każdego europejczyka na odległość około 1000 km. Przy tych założeniach, jeśli Δt będzie wyrażone w godzinach, a ε jako wielokrotność średnic Księżyca, to $D \approx 1000\Delta t$ km, $\pi \approx (\Delta t - \varepsilon)/100$, zaś $r = D/\pi$ km.

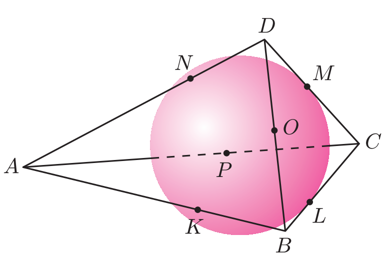
Udanych obserwacji i dobrej zabawy!

Kącik przestrzenny (16): Sfera styczna do krawędzi czworościanu

Dla trójkąta definiujemy okrąg opisany i okrąg wpisany. Podobnie z czworościanem można związać dwie naturalne sfery: sferę przechodzącą przez wierzchołki (opisaną) oraz sferę styczną do ścian (wpisaną). Można jednak rozważać jeszcze trzecią ciekawą sferę – styczną do krawędzi. Taka sfera na pewno istnieje dla czworościanu foremnego (jej środek pokrywa się ze środkami sfery wpisanej i opisanej, zaś promień jest równy odległości tego punktu od dowolnej krawędzi). Dla jakich innych czworościanów można taką sferę znaleźć? Odpowiedź zawarta jest w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 1. *Następujące warunki są równoważne*:

(a) *istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu,*
(b) *istnieją cztery parami styczne sfery o środkach w wierzchołkach czworościanu,*
(c) *sumy długości trzech par przeciwległych krawędzi czworościanu są równe,*
(d) *okręgi wpisane w ściany czworościanu są parami styczne.*



Rys. 1

Dowód. (a)⇒(b). Oznaczmy przez K, L, M, N, O, P punkty styczności danej sfery odpowiednio z krawędziami AB, BC, CD, DA, BD, AC. Wówczas z Najmocniejszego Twierdzenia Stereometrii (patrz Kącik 2) otrzymujemy

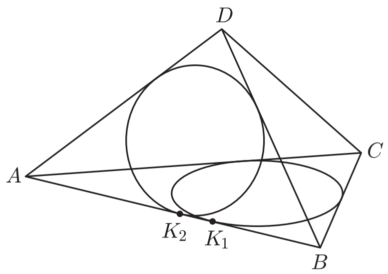
$$AK = AN = AP = a, \qquad BK = BL = BO = b,$$
$$CL = CM = CP = c, \qquad DM = DN = DO = d.$$

Nietrudno teraz zauważyć, że sfery o środkach A, B, C, D i promieniach odpowiednio a, b, c, d są parami styczne.

(b)⇒(c). Przyjmując poprzednie oznaczenia, otrzymujemy

$$AB + CD = AK + BK + CM + DM = a + b + c + d$$

i podobnie $AC + BD = a + b + c + d = AD + BC$.



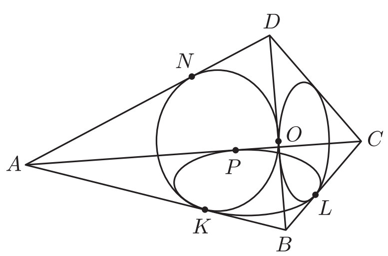
Rys. 2

(c)⇒(d). Załóżmy, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ABD są styczne do krawędzi AB odpowiednio w punktach K_1 i K_2. Wtedy wykorzystując zależność $AD + BC = AC + BD$, otrzymujemy

$$2BK_1 = AB + AC - BC = AB + AD - BD = 2BK_2,$$

a więc $K_1 = K_2$, czyli okręgi te są styczne do krawędzi AB w tym samym punkcie. W ten sam sposób stwierdzamy, że każde dwa okręgi wpisane w ściany czworościanu są styczne.

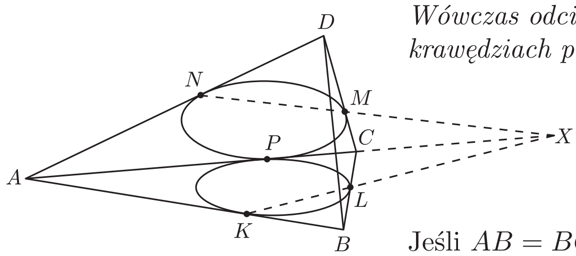
(d)⇒(a). Załóżmy, że okręgi wpisane w ściany czworościanu są parami styczne i oznaczmy przez K, L, M, N, O, P ich punkty styczności odpowiednio z krawędziami AB, BC, CD, DA, BD, AC. Przez środki I_D oraz I_C okręgów wpisanych odpowiednio w ściany ABC i ABD prowadzimy proste prostopadłe do tych ścian. Ponieważ leżą one w płaszczyźnie KI_CI_D i nie są równoległe, więc mają punkt wspólny S. Istnieje sfera o środku S zawierająca okręgi wpisane w ściany ABC i ABD (a więc styczna do pięciu krawędzi czworościanu zawartych w tych ścianach). Częścią wspólną tej sfery z płaszczyzną BCD jest okrąg styczny do BC w punkcie L, zaś do BD w O. Taki okrąg jest wyznaczony jednoznacznie, a zatem z założenia wnosimy, że musi być to okrąg wpisany w trójkąt BCD. Stąd wniosek, że dana sfera jest też styczna do krawędzi CD. □



Rys. 3

Sfera styczna do krawędzi czworościanu ma pewne cechy analogiczne do własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt. Jedną z nich jest następująca własność, którą można nazwać odpowiednikiem twierdzenia Brianchona.

Twierdzenie 2. *Sfera s jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu. Wówczas odcinki łączące punkty styczności leżące na przeciwległych krawędziach przecinają się w jednym punkcie.*



Rys. 4

Dowód. Oznaczmy, jak poprzednio, przez K, L, M, N, O, P punkty styczności sfery s z krawędziami czworościanu $ABCD$. Wykażemy najpierw, że punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie.

Jeśli $AB = BC$, to $AD = CD$ i proste KL i MN są równoległe, więc leżą na pewnej płaszczyźnie. W przeciwnym razie istnieje punkt X przecięcia prostych KL i AC. Z twierdzenia Menelaosa otrzymujemy

$$1 = \frac{CL}{BL} \cdot \frac{BK}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{CL}{AK} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{CM}{AN} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} \cdot \frac{AX}{CX}.$$

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelaosa wnosimy, że punkt X leży również na prostej MN. W takim razie i w tym przypadku punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie.

Odcinki KM i LN mają więc punkt wspólny W_1. Analogicznie stwierdzamy, że odcinki KM i OP przecinają się w punkcie W_2. W ten sam sposób dowodzimy, że punkty L, O, N, P leżą na jednej płaszczyźnie, do której należą w szczególności punkty W_1 i W_2. Jednak odcinek KM nie leży w tej płaszczyźnie, a więc może mieć z nią co najwyżej jeden punkt wspólny. Zatem $W_1 = W_2$ i rozważane trzy odcinki są współpękowe. □

Jeśli przez a, b, c, d oznaczymy odpowiednio promienie sfer o środkach A, B, C, D (jak w punkcie (b) Twierdzenia 1), zaś przez V objętość danego czworościanu, to promień ℓ sfery stycznej do krawędzi wyraża się wzorem

$$\ell = \frac{2abcd}{3V}.$$

Wzór ten można uzasadnić, rozważając inwersję o środku w punkcie styczności sfer o środkach A i B. Po niedługich rachunkach otrzymujemy ułamek, którego licznik jest równy $2abcd$, zaś mianownik jest dość skomplikowanym wyrażeniem zależnym od a, b, c, d – można się przekonać, że takim właśnie wzorem wyraża się potrojona objętość tego czworościanu. Autor nie zna uzasadnienia, które nie wymagałoby przejścia przez ten wzór.

Na zakończenie dodajmy, że można rozważać sferę, która jest styczna do pewnych krawędzi oraz do przedłużeń pozostałych krawędzi czworościanu (analogicznie do okręgów dopisanych na płaszczyźnie). Zbadanie jej własności pozostawiamy Czytelnikom.

Michał KIEZA