Nierówności i styczne

Michał KIEZA

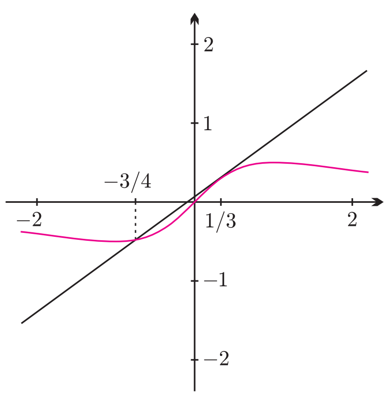
W dowodzeniu nierówności często pomocna bywa tak zwana metoda stycznych. Zdarza się, że wykres funkcji leży nad pewną prostą styczną do niego lub pod taką prostą (wszędzie lub tylko na jakimś przedziale). To oznacza, że możemy oszacować wartości tej funkcji przez wartości funkcji liniowej, której wykresem jest wybrana styczna. Żeby takie oszacowanie doprowadziło do celu, wybrana styczna musi przechodzić przez punkt, dla którego badana nierówność jest równością. Przyjrzymy się kilku przykładom zastosowań tej metody. We wszystkich przyda się równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0:

$$y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0.$$

Sprawnie różniczkujący Czytelnik wyprowadzi ten wzór z łatwością.

1. (XLVII Olimpiada Matematyczna, II etap) *Wykazać, że jeśli każda z liczb a, b, c jest nie mniejsza od $-\frac{3}{4}$ oraz $a+b+c=1$, to*

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{9}{10}.$$



Rys. 1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ oraz stycznej do wykresu w punkcie $\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. Daną nierówność możemy przepisać w postaci

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqslant \frac{9}{10}, \quad \text{gdzie} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Zauważmy, że równość zachodzi dla $a=b=c=\frac{1}{3}$. Równanie stycznej do funkcji f w punkcie $\frac{1}{3}$ ma postać

$$y = \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}.$$

Zauważmy, że dla liczb a, b, c, spełniających warunek $a+b+c=1$, suma wartości wyrażenia $\frac{18}{25}x + \frac{3}{50}$ jest równa $\frac{18}{25}(a+b+c) + 3\cdot\frac{3}{50} = \frac{9}{10}$.

Wystarczy więc, jeśli wykażemy, że dla $x \geqslant -\frac{3}{4}$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{18}{25}x + \frac{3}{50},$$

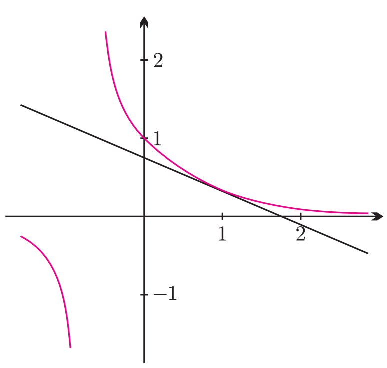
co sugeruje wykres na rysunku 1. Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$0 \leqslant (3x-1)^2(4x+3),$$

a ta nierówność jest spełniona, ponieważ $x \geqslant -\frac{3}{4}$.

2. (Zadanie 506 z Klubu 44M) *Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność*

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3} + \frac{b^4}{b^3+b^2c+c^3} + \frac{c^4}{c^3+c^2d+d^3} + \frac{d^4}{d^3+d^2a+a^3} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{a+b+c+d}{4}.$$



Rys. 2. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x+x^3}$ i stycznej w $x=1$.

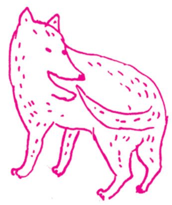
Rozwiązanie. Na pierwszy rzut oka ten przykład jest inny od poprzedniego – tym razem mamy sumę funkcji dwóch zmiennych. Ale to tylko pozorna trudność. Spróbujmy udowodnić nierówność

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3} \geqslant \alpha a + \beta b,$$

gdzie α i β są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Dzieląc obie strony przez a i podstawiając $x = \frac{b}{a}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{1+x+x^3} \geqslant \alpha + \beta x.$$

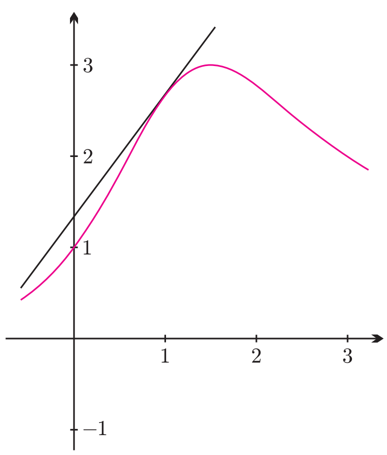
Teraz już wiemy, co robić: w wyjściowej nierówności równość zachodzi dla $a=b=c=d$, więc musimy tak dobrać współczynniki α i β, aby równość zachodziła dla $x=1$. Znajdując równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x+x^3}$ w punkcie $x=1$, otrzymujemy współczynniki $\alpha = \frac{7}{9}$ i $\beta = -\frac{4}{9}$.



Udowodnimy teraz, że dla dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność
$$\frac{1}{1+x+x^3} \geqslant \frac{7}{9} - \frac{4}{9}x.$$
Równoważnie możemy zapisać $4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, a następnie doprowadzamy nierówność do postaci $(x-1)^2(4x^2+x+2) \geqslant 0$ – teraz widać, że to prawda dla dowolnego $x \geqslant 0$. Zatem dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność
$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3} \geqslant \frac{7}{9}a - \frac{4}{9}b.$$
Szacując w ten sposób każdy ze składników lewej strony wyjściowej nierówności, dostajemy tezę.

3. (Olimpiada Matematyczna USA 2003) *Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność*
$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leqslant 8.$$

Rozwiązanie. Tym razem sytuacja jest jeszcze inna, ponieważ mamy sumę funkcji trzech zmiennych. Jednak i w tym przypadku łatwo można ją sprowadzić do sumy funkcji jednej zmiennej. Zauważmy, że dana nierówność jest jednorodna: liczniki i mianowniki ułamków są wielomianami złożonymi z jednomianów tego samego stopnia, a ponadto stopień licznika i mianownika jest taki sam. Stąd wynika, że możemy bez straty ogólności przyjąć $a+b+c=3$. (Jest to bardziej wygodne niż założenie $a+b+c=1$, gdyż równość zachodzi dla $a=b=c=1$.) Wówczas dana nierówność przyjmuje postać
$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leqslant 8.$$
Znajdując równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2}$ w punkcie $x=1$, otrzymujemy do udowodnienia nierówność
$$\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2} \leqslant \frac{4}{3}x + \frac{4}{3},$$
która jest równoważna $0 \leqslant 12x^3 - 15x^2 - 6x + 9 = 3(x-1)^2(4x+3)$, co jest prawdą dla $x > 0$. Dodając stronami otrzymane w ten sposób oszacowania wszystkich ułamków lewej strony danej nierówności, otrzymujemy tezę.



Rys. 3. Wykres funkcji
$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2}$$
i stycznej w $x=1$.

Jak nietrudno się przekonać, przy założeniu $a+b+c=3$, nierówność zachodzi nie tylko dla liczb dodatnich, ale także dla nie mniejszych niż $-\frac{3}{4}$.

Zadania dla Czytelników

4. (Zwardoń 2006) *Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $n \geqslant 1$, spełniają warunki*
$$\frac{1}{n}\frac{x_i^2}{x_i+1} \leqslant \frac{1}{2} \quad \textit{oraz} \quad x_k > -1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$
Udowodnić, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant n$.

5. (Jugosławia 1986) *Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność*
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

6. (Japonia 1997) *Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność*
$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geqslant \frac{3}{5}.$$