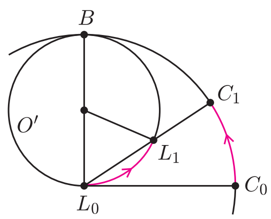
Lew i człowiek

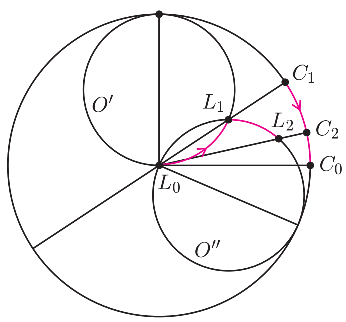
*Jarosław GÓRNICKI**

Około 1930 roku Richard Rado (1906–1989) postawił następujący problem:

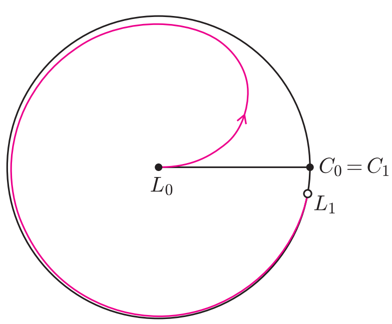
Lew (L) i człowiek (C) – traktowani jako punkty – poruszają się w domkniętym kole jednostkowym z jednakowymi maksymalnymi prędkościami. Czy (głodny) lew zawsze złapie człowieka?



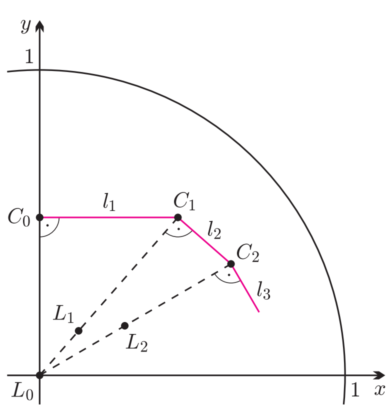
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Przez ponad dwadzieścia lat wierzono, że w tej „grze” lew jest zawsze zwycięzcą. Uzasadniała to następująca strategia:

Strategia lwa. Lew, przechodząc do środka koła, zmusza człowieka do zajęcia pozycji na brzegu koła i ucieczki z maksymalną prędkością wzdłuż brzegu koła (każde odejście człowieka od brzegu to zbliżenie się do lwa). Załóżmy, że lew znajduje się początkowo w punkcie $L_0 = (0, 0)$, a człowiek w punkcie $C_0 = (1, 0)$. Sprytny lew przemieszcza się z maksymalną prędkością, stale pozostając na promieniu L_0C_t, gdzie C_t jest położeniem człowieka w chwili t. Oznacza to, że lew biegnie po łuku mniejszego okręgu O' (o promieniu $\frac{1}{2}$; rysunek 1). Ponieważ łuki L_0L_1 i C_0C_1 są równej długości (lew i człowiek biegną z jednakowymi maksymalnymi prędkościami), więc lew spotka człowieka w punkcie B. Nagła zmiana kierunku ucieczki człowieka, np. w punkcie C_1, nie poprawia sytuacji człowieka! Lew, odbijając symetrycznie mały okrąg O' wzdłuż prostej L_0C_1, będzie biegł po łuku L_1L_2 okręgu O'' (rysunek 2). Zatem, bez względu na tor ucieczki człowieka po brzegu koła, zostanie on złapany i to w czasie nie większym niż czas potrzebny na to, by lew przebiegł połowę obwodu mniejszego okręgu.

Uwaga. Przypadek ten pokazuje, że często spotykana sugestia „najlepszą metodą pościgu jest pościg w kierunku uciekającego” w wielu sytuacjach nie ma żadnego racjonalnego uzasadnienia – gdyby w rozpatrywanej „grze” lew biegł w kierunku uciekającego człowieka – wzdłuż tzw. krzywej pościgu – to pozostałby głodny (rysunek 3).

Dopiero w 1952 r. – ponad dwadzieścia lat po postawieniu problemu – Abram S. Besicovitch (1891–1970) zauważył, że nieuzasadnione jest zakładanie, iż najlepszą strategią dla człowieka jest „być jak najdalej od lwa i poruszać się wzdłuż brzegu koła”, oraz zaproponował błyskotliwy sposób skutecznej ucieczki przed lwem. Opisał to J.E. Littlewood w *A Mathematician's Miscellany*, Methuen and Co., Ltd., London 1953, s. 135–136.

Strategia człowieka (Besicovitch)**.** Załóżmy, że lew znajduje się w punkcie $(0, 0)$, a człowiek w punkcie $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Kolejne pozycje zajmowane przez lwa i człowieka – zawsze poruszających się z jednakowymi maksymalnymi prędkościami – będziemy oznaczać literami $L_0, L_1, L_2, \ldots, C_0, C_1, C_2, \ldots$, odpowiednio. Człowiek przemieszcza się wzdłuż łamanej o wierzchołkach $C_0, C_1, C_2, \ldots$ utworzonej z odcinków o długościach

$$l_n = |C_{n-1}C_n| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/4}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie każdy odcinek $C_{n-1}C_n$ jest prostopadły do promienia L_0C_{n-1}, $n = 1, 2, \ldots$ (rysunek 4).

Wówczas:

Po pierwsze, całkowita długość łamanej $C_0C_1C_2\ldots$ jest nieskończona, bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}} > \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

(gdyby było $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < +\infty$, to wobec

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} > 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = s$$

mielibyśmy sprzeczność).

*Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Po drugie, lew nie może złapać człowieka.

Istotnie. Niech człowiek przemieszcza się po odcinku, a lew utrzymuje się na promieniu L_0C, jak zostało to ustalone w Strategii lwa. Ponieważ odcinek C_0C_1 jest prostopadły do promienia L_0C_0, więc lew nie może złapać człowieka, gdy człowiek przebiega odcinek C_0C_1. Podobnie, ponieważ odcinek C_1C_2 jest prostopadły do promienia L_0C_1 ($L_1 \in L_0C_1$), więc lew nie może złapać człowieka, gdy człowiek przebiega odcinek C_1C_2, i tak we wszystkich pozostałych odcinkach nieskończenie długiej łamanej.

Uwaga. Łamana $C_0C_1C_2\ldots$ nie musi tworzyć „spirali”, biegnąc np. stale zgodnie z ruchem wskazówek zegara, ale w każdym z wierzchołków może zmienić kierunek na przeciwny. Gdy zaś lew porusza się według innych zasad, to należy spojrzeć, gdzie lew znajduje się w n-tym kroku – jeśli L_n znajduje się we wnętrzu jednej z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą L_0C_n, to człowiek powinien przemieszczać się (wzdłuż łamanej) w kierunku półpłaszczyzny bez lwa.

Co więcej, łamana $C_0C_1C_2\ldots$ zawiera się we wnętrzu koła jednostkowego.

Z twierdzenia Pitagorasa bowiem mamy (rysunek 4):

$$\begin{aligned} |L_0C_0|^2 + l_1^2 &= |L_0C_1|^2,\\ |L_0C_1|^2 + l_2^2 &= |L_0C_2|^2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ |L_0C_{n-1}|^2 + l_n^2 &= |L_0C_n|^2, \end{aligned}$$

więc

$$|L_0C_n|^2 = l_n^2 + |L_0C_{n-1}|^2 = l_n^2 + (l_{n-1}^2 + |L_0C_{n-2}|^2) = \ldots = \sum_{k=1}^{n} l_k^2 + |L_0C_0|^2,$$

a stąd dla $n = 1, 2, \ldots$, zachodzi

$$|L_0C_n| = \sqrt{\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n} l_k^2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}}. \tag{1}$$

Aby oszacować (od góry) wartość wyrażenia $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$, rozważmy funkcję $f(x) = x^{-3/2}$, $x > 0$ (rysunek 5). Wówczas

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant f(1) + f(2) + f(3) + \int_3^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ponieważ

$$f(1) = 1, \qquad f(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad f(3) = \frac{1}{\sqrt{27}}, \qquad \int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}} = -2x^{-1/2}\Big|_3^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

więc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \leqslant 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{2}{\sqrt{3}} < 2{,}8. \tag{2}$$

Stosując oszacowanie (2) w wyrażeniu (1), otrzymujemy

$$|L_0C_n| < \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 2{,}8} = \sqrt{0{,}95} < 1 \qquad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

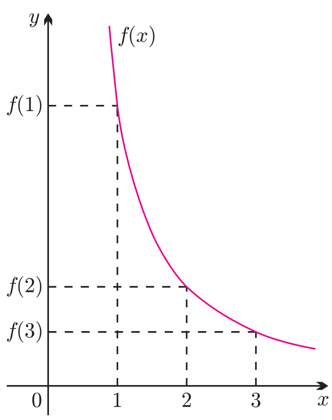
co kończy uzasadnienie poprawności strategii Besicovitcha.

Istnieje wiele wariantów problemu Rado, na przykład:

Szpaki i mucha. W n-wymiarowej kuli jednostkowej znajdują się szpaki i jedna mucha. Wszyscy poruszają się z jednakową maksymalną prędkością. Jaka minimalna liczba szpaków gwarantuje pochwycenie muchy? (Odpowiedź: n szpaków wystarczy, a $n-1$ nie.)

Niektóre z tego typu problemów wciąż czekają na swoich pogromców. Jeden z nich ma wyjątkowo proste sformułowanie.

Lwy na polu golfowym. Czy dwa lwy złapią człowieka na ograniczonym polu golfowym ze skończenie wieloma jeziorkami? (Zakładamy, że wszyscy uczestnicy „gry” poruszają się z jednakowymi maksymalnymi prędkościami, nie mogą wchodzić do wody, a brzegi jeziorek są krzywymi gładkimi.)



Rys. 5

Rozwiązanie zadania M 1377.
Załóżmy przeciwnie, że wielościan nie jest wpisany w sferę. Wtedy istnieją dwa wierzchołki wielościanu, dla których sfery z zadania M 1376 różnią się. Połączmy te wierzchołki ścieżką złożoną z krawędzi. Wtedy znajdziemy taką krawędź AB na tej ścieżce, że sfera zawierająca wierzchołki ścian spotykających się w A różni się od sfery, w którą są wpisane ściany spotykające się w B. Ale to znaczy, że dla sąsiednich ścian o wspólnej krawędzi AB istnieją dwie różne sfery, w które te ściany są jednocześnie wpisane, co przeczy tezie zadania M 1375.