Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

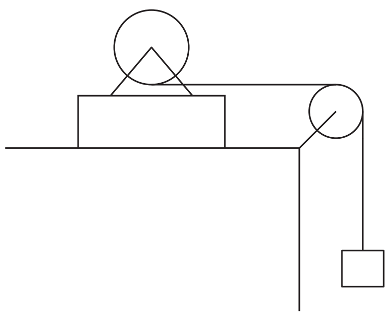
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2013

Zadania z fizyki nr 552, 553

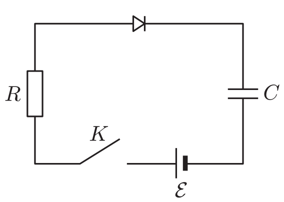
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

552. Do podstawki leżącej na stole przymocowany jest pełny walec o promieniu R, który może swobodnie obracać się wokół własnej osi. Do końca nici nawiniętej na walec i przerzuconej przez nieruchomy bloczek, jak na rysunku 1, przymocowano ciężarek. Masy podstawki, walca i ciężarka są jednakowe. Ile obrotów wykona walec w czasie t? W chwili początkowej układ spoczywa. Tarcie można zaniedbać.

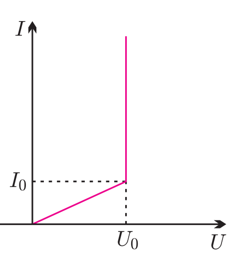


Rys. 1

553. Ile ciepła wydzieli się na oporze R w obwodzie przedstawionym na rysunku 2(a) po zamknięciu klucza? W chwili początkowej kondensator o pojemności C nie jest naładowany. Siła elektromotoryczna źródła prądu wynosi $\mathcal{E}$, opór wewnętrzny źródła jest zaniedbywalny. Wyidealizowana charakterystyka prądowo-napięciowa diody przedstawiona jest na rysunku 2(b).



Rys. 2(a)



Rys. 2(b)

Rozwiązania zadań z numeru 10/2012

Przypominamy treść zadań:

544. Cienkościenna, nieprzewodząca sfera o promieniu R i masie M naładowana jest równomiernie ładunkiem Q. W sferze znajdują się dwa niewielkie otwory leżące na tej samej średnicy. Cząstka o masie m i ładunku q jednoimiennym z Q zaczyna zbliżać się do sfery z bardzo dużej odległości wzdłuż prostej przechodzącej przez otwory, z prędkością początkową v. W chwili początkowej sfera spoczywa. Ile czasu cząstka znajdować się będzie wewnątrz sfery? Przyjmij, że efekty magnetyczne są zaniedbywalne.

545. Satelita poruszający się po orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o promieniu r został przyhamowany i zaczął poruszać się po orbicie eliptycznej, stycznej do powierzchni planety. Wyznaczyć czas spadania satelity na planetę. Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety wynosi $\mathbf{g}$.

544. Sposób 1. Jako układ odniesienia możemy wybrać układ inercjalny, w którym sfera w chwili początkowej spoczywa. Siły elektrostatyczne są zachowawcze oraz nie działają żadne siły zewnętrzne, spełnione są więc zasady zachowania energii i pędu:

$$\frac{(mv^2)}{2} = \frac{(Mv_1^2)}{2} + \frac{(mv_2^2)}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R},$$
$$mv = Mv_1 + mv_2,$$

gdzie v_1 i v_2 są odpowiednio prędkościami sfery i cząstki w chwili, gdy cząstka dotrze do pierwszego otworu. Musi być spełniony warunek $v_2 > v_1$. Wiemy z prawa Gaussa, że wewnątrz równomiernie naładowanej sfery nie ma pola elektrycznego, cząstka porusza się więc od jednego do drugiego otworu ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością względną $v_x = v_2 - v_1$. Szukany czas wynosi $t = 2R/v_x$.

Sposób 2. Przyspieszenia $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_1$ odpowiednio cząstki i sfery w dowolnym układzie inercjalnym wynoszą $\vec{a}_2 = \vec{F}/m$ i $\vec{a}_1 = -\vec{F}/M$, gdzie $\vec{F}$ jest siłą, jaką sfera działa na cząstkę wzdłuż wektora położenia względnego obu ciał, a jej wartość zależy od odległości między nimi. Przyspieszenie względne wynosi $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{F}/\mu$, gdzie $\mu = mM/(M+m)$. Jest to równanie ruchu fikcyjnej cząstki o masie μ, zwanej masą zredukowaną układu dwóch ciał, poruszającej się z ich prędkością względną w polu siły $\vec{F}$. Zasada zachowania energii w naszym problemie sprowadzonym do ruchu jednego ciała ma teraz postać

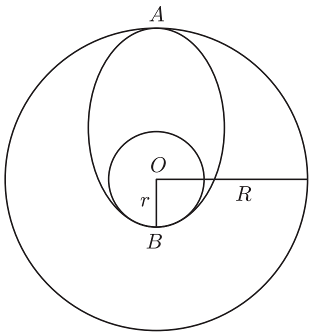
$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v_x^2}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Stąd

$$v_x = \sqrt{v^2 - \frac{Qq(M+m)}{2\pi\varepsilon_0 RmM}}.$$

Szukany czas wynosi $t = 2R/v_x$, gdy $v > \sqrt{Qq(M+m)/2\pi\varepsilon_0 RmM}$, dla mniejszych prędkości cząstka nie dotrze do wnętrza sfery.

Warto sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że energia kinetyczna fikcyjnej cząstki o masie zredukowanej równa jest sumie energii kinetycznych sfery i cząstki w układzie ich środka masy.



Rys. 3

545. Przyjmijmy, że zmniejszenie prędkości satelity nastąpiło w punkcie A orbity kołowej przedstawionej na rysunku 3. Ognisko elipsy, po której zaczyna poruszać się satelita, znajduje się w punkcie O w środku planety. Interesuje nas czas, po którym satelita znajdzie się w punkcie B, czyli połowa okresu obiegu po elipsie T_1. Z III prawa Keplera mamy

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a^3}{R^3},$$

gdzie T jest okresem obiegu satelity po orbicie kołowej, natomiast a – półosią wielką elipsy: $a = (R+r)/2$. Okres obiegu po orbicie kołowej wyznaczamy, wiedząc, że siła dośrodkowa jest siłą grawitacji

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{\mathrm{G}Mm}{R^2}$$

oraz $T = 2\pi R/v$ (M i m to masy planety i satelity, v to prędkość satelity). Stąd

$$T_1^2 = \frac{\pi^2(R+r)^3}{2\mathrm{G}M}.$$

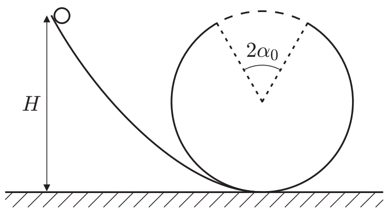
Uwzględniając, że przyspieszenie na powierzchni planety wyraża się wzorem $\mathrm{g} = \mathrm{G}M/r^2$, otrzymujemy szukany czas:

$$t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{2r}\sqrt{\frac{(R+r)^3}{2\mathrm{g}}}.$$

* * *

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F

Zadania przygotowywane od lutego 2012 r. przez Ewę Czuchry miały nieco bardziej popularny charakter niż pojawiające się w lidze pod kierownictwem Jerzego B. Brojana. Oceniając nadesłane przez uczestników naszej zabawy rozwiązania, niżej podpisany miał zatem przyjemność zapoznawać się z eleganckimi i poprawnymi rozwiązaniami.



Rys. 4

Tym większym zaskoczeniem był fakt, że wzięte wprost z podręcznika Hallidaya i Resnicka zadanie **538** ($WT = 1{,}96$) polegające na ocenie wysokości, z jakiej musi staczać się ciało, aby, oderwawszy się na początku wyrwy toru przedstawionego na rysunku 4, nie wypadło poza tę wyrwę, miało tak mało poprawnych rozwiązań. Spośród dziesięciu (!) nadesłanych rozwiązań jedynie prace **A. Idzika** i **T. Wietechy** zawierały kompletną dyskusję obu warunków, jakie ciało to musi spełnić: zasięg rzutu ukośnego ze skraju wyrwy nie może przekraczać jej rozmiaru oraz siła grawitacji nie oderwie ciała od toru przed osiągnięciem brzegu wyrwy. Chociaż niemal wszyscy rozwiązujący zauważyli pierwszy z tych warunków, drugi z nich umknął uwagi większości autorów.

Uwzględnienie obu warunków prowadzi do podwójnej nierówności na poszukiwaną wysokość. Tu niżej podpisany musi uderzyć się w piersi, bowiem opublikowane w numerze 9/2012 rozwiązanie zawiera irytującą literówkę: ostateczny wynik powiniem mieć postać

$$\frac{1}{2}\cos\alpha_0 \leqslant \frac{H}{R} - 1 - \cos\alpha_0 \leqslant \frac{1}{2\cos\alpha_0}.$$

Krzysztof TURZYŃSKI

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 541 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 39,02
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2 – 28,34
Tomasz Wietecha (Tarnów)	8 – 27,04
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	23,47
Jacek Konieczny (Poznań)	23,03
Ryszard Woźniak (Kraków)	20.88
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	10 – 19,79

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2009–2012 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (10), T. Wietecha (8), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana zostają odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni": M. Koźlik, J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Piotrowski;

„jednokrotni": A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2013

Zadania z matematyki nr 655, 656

Redaguje Marcin E. KUCZMA

655. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC oraz przedłużeń boków AB, AC. Punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD. Dowieść, że jeżeli trójkąt CEF jest równoramienny, to także trójkąt CBD jest równoramienny.

656. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Niech M_n będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny składa się z n dziewiątek: $M_n = 99\ldots9 = 10^n - 1$. Znaleźć najmniejszą jej wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym cyfra 9 nie występuje.

Zadanie 656 zaproponował pan Piotr Zarzycki z Gdańska.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2012

Przypominamy treść zadań:

647. Dany jest przedział otwarty, którego końcami są kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych, większych od 1. Dowieść, że w tym przedziale można znaleźć trzy różne liczby naturalne a, b, c takie, że $a^2 + b^2$ dzieli się przez c.

648. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$. Udowodnić, że ciąg $\left(\sqrt[n]{F_{n+2}}\right)$ jest malejący.

647. Niech liczby n^2, $(n+1)^2$ będą końcami danego przedziału. Wymagane warunki spełniają na przykład liczby $a = n^2 + 2$, $b = n^2 + n + 1$, $c = n^2 + 1$. Rzeczywiście, $a \equiv 1$, $b \equiv n \pmod{c}$, więc $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{c}$.

648. Mamy dowieść, że $F_{n+1}^n > F_{n+2}^{n-1}$. Dla $n = 2$ to prawda $(2^2 > 3^1)$. Dalej przyjmujemy $n \geqslant 3$. Korzystamy ze wzoru $F_n = (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})/\sqrt{5}$, gdzie $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Oznaczmy:

$$E_n = \frac{\varphi^n - \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad G_n = \frac{\varphi^n + \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}; \quad \text{zatem} \quad E_n \leqslant F_n \leqslant G_n.$$

Wystarczy pokazać, że $E_{n+1}^n > G_{n+2}^{n-1}$, czyli $(E_{n+1}/G_{n+2})^n > 1/G_{n+2}$. A ponieważ $G_{n+2} > \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$, wystarczy dowieść, że

$$\left(\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}}\right)^n > \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{n+2}}. \tag{1}$$

Iloraz w nawiasie szacujemy z dołu:

$$\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{-n-1}}{\varphi^{n+2} + \varphi^{-n-2}} = \frac{1}{\varphi}\left(1 - \frac{\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4}}{1 + \varphi^{-2n-4}}\right) > \frac{1 - (\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4})}{\varphi}.$$

Stąd i z nierówności Bernoulliego

$$\left(\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}}\right)^n > \frac{1 - n(\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4})}{\varphi^n} = \frac{\varphi^2 - n\varphi^{-2n}(1 + \varphi^{-2})}{\varphi^{n+2}}.$$

Nierówność (1) będzie udowodniona, jeśli wykażemy, że licznik tego ostatniego ilorazu przekracza $\sqrt{5}$; jest to równoważne nierówności

$$\frac{\varphi^{2n}}{n} > \frac{1 + \varphi^{-2}}{\varphi^2 - \sqrt{5}}. \tag{2}$$

Podstawiając wartość stałej φ, sprawdzamy, że nierówność (2) zachodzi dla $n = 3$. Zachodzi więc dla wszystkich $n \geqslant 3$, bo wyrażenie po lewej stronie (2) przedstawia ciąg rosnący. To kończy dowód.

* * *

Napracowałem się przy tym zadaniu jak wół; jest obawa, że jak osioł. Tymi słowami rozpoczynała się jedna z nadesłanych do ligi prac. Trudno o większą radość dla redaktora ligi, który takie pełne wdzięku wyznanie odczytuje jako widomy przekaz, że prowadzenie ligi ma sens; że dostarcza ona uczestnikom ciekawych wrażeń. Jest więc okazja, żeby podziękować wszystkim, którzy tymi swoimi wrażeniami dzielą się z nami w przysyłanej korespondencji.

Czasem udaje się redaktora nieźle zaskoczyć. Oto inny z uczestników napisał, że zadania są rzetelnie trudne (co prawda, to prawda – przynajmniej niektóre), ich rozwiązywanie wymaga czasu i wysiłku, więc może by się za włożony trud należała jakaś nagroda: list uznaniowy do uczelni, czy wręcz stopień naukowy.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 643 ($WT = 1{,}80$) i 644 ($WT = 1{,}74$) z numeru 6/2012

Tomasz Wietecha	8–44,80
Jędrzej Garnek	43,91
Roksana Słowik	43,65
Zbigniew Skalik	1–41,25
Adam Dzedzej	1–40,33
Wojciech Nadara	39,64
Paweł Łabędzki	35,77
Rami Marcin Ayoush	34,52
Janusz Olszewski	13–34,05
Zbigniew Sewartowski	1–32,78
Tomasz Kochanek	32,40
Witold Bednarek	5–29,51
Andrzej Dorobisz	29,11
Marek Spychała	1–28,77
Krzysztof Kamiński	1–27,21
Andrzej Idzik	1–26,22
Jerzy Witkowski	5–24,14
Janusz Fiett	23,98
Tomasz Czajka	23,20
Michał Koźlik	22,80
Krzysztof Dorobisz	3–22,64
Grzegorz Karpowicz	1–21,28
Paweł Najman	5–20,86
Bartłomiej Dyda	5–20,18

Legenda (przykładowo): stan konta 5–29,51 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 29,51 punktów.

W tej kolejce 44 punkty przekroczył, i to już po raz dziewiąty, **Tomasz Wietecha** – nie mający sobie równych w ligowym dwuboju mat-fiz.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2010, 2011 lub 2012.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (13), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (9), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (5), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni":
Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni":
T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Na ile to było żartem, na ile serio? Powtórzmy nasze ulubione słowo, które się w corocznych omówieniach wielokrotnie pojawiało: zabawa. Nasza liga doprawdy nie ma ambicji być niczym innym.

Biorą w tej zabawie udział głównie uczniowie i studenci; tego oczekiwaliśmy, gdy liga zaczynała żywot. Ale jest też dość liczne grono uczestników bardziej zaawansowanych wiekowo, dla których matematyka była młodzieńczą fascynacją – nierzadko wręcz kierunkiem studiów – jednak dalsza ścieżka zawodowa poprowadziła w inne rejony; zadania ligowe pozwalają przywołać wspomnienia. I to właśnie jeden z nich uroczo napisał *napracowałem się jak wół*. Serdecznie życzymy dalszej uciechy z zabawy w ligę!

A teraz zwykłe omówienie wybranych zadań.

Zadanie **626** [Ciągi (x_n), (y_n): $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = (x_n + x_n^{-1})/2$, $y_n = \prod_{k=1}^{n} x_k^{2^{-k}}$; $\lim y_n = ?$] (współczynnik trudności $WT = 2{,}83$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). **J. Garnek** i **J. Olszewski** przedstawili rozwiązania podobne do firmowego, nieco zgrabniej zapisane. Inne było rozwiązanie autora zadania (**J. Cisło**) – na tym samym pomyśle oparł swoją pracę **W. Nadara**:

Badane ciągi zależą od liczby $a > 0$; piszmy $y_n(a)$. Dla $a \geqslant 1$ mamy $1 \leqslant y_n(a) \leqslant y_{n+1}(a) \leqslant a$, więc istnieje granica $\lim y_n(a) =: g(a)$. Tak określona funkcja g spełnia w przedziale $\langle 1; \infty)$ warunki

$$g(a)^2 = a \cdot g\Big(\frac{a + a^{-1}}{2}\Big), \qquad 1 \leqslant g(a) \leqslant a; \tag{1}$$

równanie funkcyjne wynika z definicji $y_n(a)$ przez podniesienie do kwadratu i przejście do granicy. Oznaczając $f(a) = (a + a^{-1})/2$ i przepisując równanie jako $g(a) = a^{1/2} g(f(a))^{1/2}$, można z niego indukcyjnie wyprowadzić wzór

$$g(a) = \left[\prod_{k=1}^{n} \big(f^{k-1}(a)\big)^{2^{-k}}\right] \cdot g\big(f^n(a)\big)^{2^{-n-1}}, \qquad \text{gdzie} \quad f^m = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m}. \tag{2}$$

Łatwo sprawdzić, że $f^n(a) \to 1$ przy $n \to \infty$; stąd, wobec oszacowań w (1), czynnik poza nawiasem kwadratowym w (2) także dąży do 1. Wzór (2) (w granicy) pokazuje więc, że funkcja g jest (dla $a \geqslant 1$) jednoznacznie wyznaczona przez warunki (1). Pozostaje zauważyć, że funkcja $g(a) = (a+1)/2$ te warunki spełnia – stanowi zatem jedyne rozwiązanie. Przypadek $a \leqslant 1$ może być sprowadzony do poprzedniego przez zamianę zmiennej $x \mapsto 1/x$. Odpowiedź: $\lim y_n(a) = (a+1)/2$.

Zadanie **627** [Tabela (n wierszy, 2 kolumny; $n > 2$), w niej losowo liczby $1, \ldots, 2n$. Zdarzenia: A – w dokładnie jednym wierszu różnica wynosi ± 1; B – w żadnym wierszu różnica nie wynosi ± 1. Które bardziej prawdopodobne?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 4$ (5?)). Niektórzy uczestnicy zauważyli, że to zadanie – inaczej sformułowane, ale znaczeniowo równoważne – było zadaniem konkursowym XXX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (1989); rozwiązania można znaleźć w wielu miejscach. Konstrukcję różnowartościowego odwzorowania $B \to A$ (podaną jako rozwiązanie firmowe) wskazali **J. Cisło**, **A. Dzedzej**, **J. Fiett**.

Dwaj ostatni uczestnicy oraz **J. Olszewski** wyprowadzili ponadto wzory rekurencyjne dla liczb rozmieszczeń typów A, B, na przykład w postaci: $a_n = 2n[(2n-1)b_{n-1} + a_{n-1}]$, $b_n = 2n[(2n-2)b_{n-1} + a_{n-1}]$; $a_1 = 2$, $b_1 = 0$; jasne, że $a_n > b_n$.

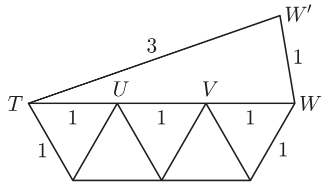
Jeszcze jedna praca zawierała konstrukcję „firmową" (lub podobną), ale z opisem niezbyt jasnym, skrótowym, z luką w uzasadnieniu.

Zadanie **631** [Czy istnieje ośmiościan opisany na kuli, której rzut na każdą ścianę jest w niej zawarty?] ($WT = 3{,}01$; $LPR = 5$). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego: **J. Cisło**, **J. Fiett**, **W. Nadara**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**.

Zadanie **633** [Płaszczyzna pokolorowana czerwono/zielono; dany $\triangle ABC \Rightarrow (\exists\, X, Y, Z$ zielone, $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC)$ lub $(\exists\, P, Q$ czerwone, $|PQ| = 1)$] ($WT = 2{,}10$; $LPR = 5$ (6? 7?)). **J. Cisło**, **P. Łabędzki** przedstawili rozwiązania nie różniące się istotnie od firmowego; **J. Olszewski** – podobne, nieco bardziej zawiłe. **A. Dzedzej** podał dowód (nie całkiem łatwy do formalnego zapisania), wykorzystujący ciągłe deformacje pewnych szczególnych konfiguracji. Jeszcze dwie prace zawierały dowody – jedną lub drugą z tych metod – jednak, zdaniem oceniającego, z takimi lukami lub niejasnościami, że nie mogły uzyskać pełnej oceny.

Do zaprezentowania wybieramy eleganckie rozwiązanie, które znalazł **Stanisław Bednarek**. Najpierw lemat: *Przy dowolnym rozbiciu płaszczyzny na trzy zbiory, w jednym z nich są dwa punkty odległe o* 1. Podany dowód:

przypuśćmy, że tak nie jest, wtedy (rysunek) punkty U, V są w różnych zbiorach i łatwo się przekonać, że punkty T, W są w jednym zbiorze; podobnie T, W'; ale $|WW'| = 1$.



A dalej tak: załóżmy, że nie istnieje $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$ o wierzchołkach zielonych. Każdemu punktowi X przyporządkujmy $\triangle XYZ$ uzyskany przez przesunięcie $\triangle ABC$ o wektor $\overrightarrow{AX}$ i wybierzmy wierzchołek czerwony; w zależności od tego, czy jest to obraz translacyjny punktu A, B czy C, zaliczamy punkt X do zbioru I, II lub III. W którymś z tych zbiorów są punkty X', X'' odległe o 1 (lemat); mamy trójkąty $X'Y'Z'$, $X''Y''Z''$, i zależnie od tego, czy to zbiór I, II czy III, odcinek $X'X''$, $Y'Y''$ lub $Z'Z''$ ma oba końce czerwone.

Warto nadmienić, że „lemat" jest znanym twierdzeniem, mówiącym, że *liczba chromatyczna* płaszczyzny (czyli minimalna liczba kolorów potrzebnych do jej pomalowania tak, by każdy odcinek jednostkowy miał końce różnobarwne) przekracza 3.

Zadanie **637** [Dla jakich n zbiór $\{1, \ldots, n\}$ da się rozbić na trzy zbiory o równych sumach?] ($WT = 1{,}27$; $LPR = 16$). Łatwiutkie. Różne metody indukcyjne, pokazujące, że to się da, gdy $n \not\equiv 1 \pmod 3$ oraz $n > 3$. Na uwagę zasługuje ciekawe uogólnienie, jakie znalazł **J. Olszewski**: zbiór $\{1, \ldots, n\}$ da się rozbić na k podzbiorów o równych sumach elementów wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1 \geqslant 2k$ oraz $n(n+1) \equiv 0 \pmod{2k}$; dowód wykonalności przez indukcję, podobną do firmowej dla $k = 3$, ale bardziej zawiłą i wymagającą rozpatrywania licznych przypadków.

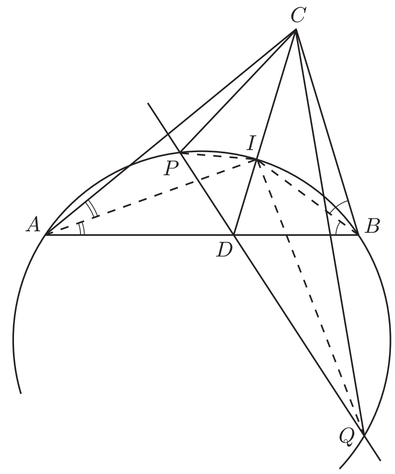
Natomiast **K. Kamiński** zauważył, że jeśli $r(n)$ oznacza liczbę rozbić zbioru $\{1, \ldots, 6n\}$ na trzy zbiory o równych sumach, to $r(n) < 3^{6n}$ (liczba wszystkich rozbić na trzy zbiory), zaś rozważając rozbicia powstałe z łączenia par o sumach $6n + 1$ można uzyskać dolne oszacowanie dla $r(n)$, również typu wykładniczego – i postawił pytanie, czy dla pewnej stałej $a > 0$ istnieje dodatnia, skończona granica $\lim a^{-n} r(n)$.

Zadanie **638** [$a, b, c > 0$, $A = \frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$, $B = \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a}$, $C = \frac{1}{3c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$, $a + b + c \geqslant abc \Rightarrow$ najwyżej jedna z liczb A, B, C jest < 1] ($WT = 2{,}38$; $LPR = 10$). Sporo dobrych prac, więc zadanie niezbyt trudne. Jednak ciekawe przez to, że właściwie wszystkie rozwiązania były różne (no, przy odpowiednim rozumieniu tego słowa...). Kilku uczestników pokazało (dość znacznie różniąc się w szczegółach), że każde dwie z liczb A, B, C dają w sumie co najmniej 2; rozwiązanie firmowe też należy do tej kategorii. Inni pokazali to samo nie dla sumy, tylko dla sumy kwadratów ($A^2 + B^2 \geqslant 2$).

Można też było wziąć iloczyn i dowodzić, że $AB \geqslant 1$; tak to zrobił **Tomasz Kochanek**, uzyskując dowód w jednej linijce:

$$AB = \frac{a+b+c}{abc} + \frac{1}{432}\Big[\Big(\frac{12}{a} - \frac{7}{b} + \frac{3}{c}\Big)^2 + 23\Big(\frac{1}{b} - \frac{3}{c}\Big)^2\Big] \geqslant 1.$$

Zadanie **639** [$\triangle ABC$; I – środek okręgu wpisanego; CI przecina AB w punkcie D; prosta przez punkt D przecina okrąg (IAB) w punktach $P, Q \Rightarrow CI$ – dwusieczna kąta PCQ] ($WT = 2{,}41$; $LPR = 7$). Popatrzmy, jak to zrobił **Jędrzej Garnek**:



$\frac{|CA|}{|DA|} = \frac{|CI|}{|DI|} = \frac{|CB|}{|DB|}$, więc okrąg (IAB) – to okrąg Apoloniusza dla odcinka CD i stosunku $\frac{|CI|}{|DI|}$. Punkty P, Q leżą na nim, zatem także $\frac{|CP|}{|DP|} = \frac{|CI|}{|DI|} = \frac{|CQ|}{|DQ|}$, a to znaczy, że proste PI, QI są dwusiecznymi dwóch kątów trójkąta CPQ; trzecia dwusieczna też musi przechodzić przez punkt I.

J. Olszewski, **T. Tkocz** przedstawili w zasadzie rozwiązanie firmowe. Inne rozwiązania (nie prostsze od firmowego): „erudycyjne" – **T. Kochanek** (inwersja), **W. Nadara** (biegunowa); rachunkowe – **A. Bujalski**, **T. Wietecha**.

Zadanie **642** [Gra (A, B). Stała: $n \geqslant 1$ nieparzysta. Zmienna (stan gry): $x \geqslant 0$ całkowita. Start: $x = n^n$. Legalne ruchy: $x \mapsto x - r$ $(0 < r < n)$ oraz $x \mapsto \mathrm{round}(x/n)$. Zaczyna A; kto osiągnie $x = 0$ (wygra)?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 7$). (Rozwiązujący wytknęli brak założenia $n > 1$). Zachowajmy terminologię z rozwiązania firmowego: liczba x jest zielona [czerwona], jeśli, startując od niej, strategię zwycięską ma gracz rozpoczynający [jego przeciwnik]. Prawie wszystkie dobre rozwiązania (**R. M. Ayoush**, **B. Dyda**, **J. Garnek**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**, **W. Tobiś**) były oparte na tym samym pomyśle, co firmowe (autor zadania **W. Nadara**): dowód, że wśród liczb $x \geqslant n^2$ czerwone są tylko (niektóre) liczby postaci $x \equiv \lceil n/2 \rceil \pmod n$; zatem $x = n^n$ jest zielona, czyli A wygrywa.

Marek Spychała zrobił to prościej, w ogóle nie wzmiankując reszty $\lceil n/2 \rceil$, a jedynie zauważając, że liczba $x = n^2$ jest zielona oraz dowodząc, że wszystkie większe liczby, podzielne przez n, są zielone. Przypuśćmy, że tak nie jest i że $x = c$ jest najmniejszą czerwoną wielokrotnością n, większą od n^2; wtedy liczba $c - 1$ (osiągalna z c) jest zielona. Wszystkie ruchy od c powinny prowadzić do liczb zielonych, zaś pewien ruch od $c - 1$ powinien prowadzić do liczby czerwonej. Ale jedyną liczbą, osiągalną od liczby $c - 1$ a nieosiągalną od c, jest liczba $c - n$, która wszelako czerwona nie jest – patrz określenie c. Gotowe! Uzyskana informacja jest słabsza niż w pozostałych rozwiązaniach (z $\lceil n/2 \rceil$), ale do potrzebnego wyniku (n^n zielona) akurat wystarczy. Krótko, ładnie.