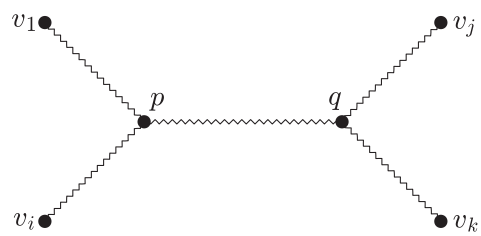
Informatyczny kącik olimpijski (59): Odśnieżanie

Zadanie *Odśnieżanie* z zeszłorocznego Obozu Naukowo-Treningowego im. A. Kreczmara można sformułować w języku teorii grafów następująco. W nieskierowanym, ważonym, spójnym grafie G wyróżniono cztery wierzchołki. Należy usunąć część krawędzi z grafu tak, żeby nadal istniały ścieżki pomiędzy każdą parą wyróżnionych wierzchołków i żeby suma wag krawędzi, które pozostały w grafie, była jak najmniejsza.

Oznaczmy zbiór wierzchołków grafu G przez V i niech n, m oznaczają liczbę wierzchołków i krawędzi w grafie. Niech $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ będą wyróżnionymi wierzchołkami. Szukany optymalny zestaw nieusuniętych krawędzi na pewno nie będzie zawierać cyklu. Gdyby były tylko dwa wyróżnione wierzchołki, v_1 i v_2, to nieusunięte krawędzie tworzyłyby najkrótszą ścieżkę z v_1 do v_2. W przypadku trzech wyróżnionych wierzchołków od ścieżki z v_1 do v_2 w pewnym miejscu odchodziłaby jeszcze ścieżka do v_3. Po chwili namysłu dochodzimy do wniosku, że w przypadku czterech wyróżnionych wierzchołków nieusunięte krawędzie powinny tworzyć kształt taki jak na poniższym rysunku. Wyróżnione wierzchołki są tutaj połączone ścieżkami z pewnymi dwoma wierzchołkami p i q (nazwijmy je wierzchołkami *centralnymi*), które również są połączone ścieżką. Bez straty ogólności wierzchołek v_1 i pewien inny wierzchołek v_i dla $i \in \{2, 3, 4\}$ są połączone z p, pozostałe dwa są połączone z q. Rysunek obejmuje również przypadki, gdy niektóre wierzchołki pokrywają się (np. $p = q$ lub $p = v_1$) – w takich sytuacjach odpowiednie ścieżki mają zerową długość.



Jeśli przez $d[u, v]$ oznaczymy długość najkrótszej ścieżki pomiędzy wierzchołkami u i v, to koszt powyższego rozwiązania wynosi

$$d[v_1, p] + d[v_i, p] + d[p, q] + d[q, v_j] + d[q, v_k].$$

Parę wierzchołków centralnych p i q możemy wybrać na $O(n^2)$ sposobów, zaś wierzchołek v_i na trzy sposoby. Jednak złożoność czasowa algorytmu jest zdominowana przez obliczenie tablicy d, które wykonujemy w czasie $O(nm \log n)$ za pomocą n wywołań algorytmu Dijkstry.

Zadanie można rozwiązać szybciej. Ustalmy $i \in \{2, 3, 4\}$. Niech graf G_i powstaje przez dodanie do grafu G dodatkowych wierzchołków s, t i dodatkowych krawędzi: wierzchołek s łączymy z każdym wierzchołkiem $u \in V$ krawędzią o wadze $d[v_1, u] + d[v_i, u]$, zaś wierzchołek t łączymy z każdym $u \in V$ krawędzią o wadze $d[u, v_j] + d[u, v_k]$.

Zauważmy, że ścieżka $s \to p \rightsquigarrow q \to t$ w grafie G_i odpowiada rozwiązaniu, w którym jako wierzchołki centralne wybieramy p i q; koszt takiego rozwiązania jest równy długości tej ścieżki. Tak więc, aby rozwiązać zadanie, wystarczy dla każdego i znaleźć najkrótszą ścieżkę z s do t w grafie G_i.

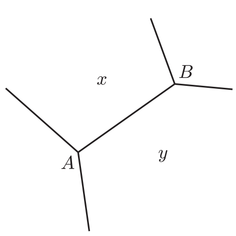
Do konstrukcji grafu G_i musimy wyznaczyć wartości $d[v, u]$ dla $v \in \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i $u \in V$. Ostatecznie nasze rozwiązanie wymaga siedmiu wywołań algorytmu Dijkstry (czterech w grafie G do obliczenia d i po jednym w grafie G_i dla każdego wyboru v_i). Graf G_i ma $n + 2$ wierzchołków i $m + 2n$ krawędzi, więc koszt algorytmu Dijkstry jest w nim taki sam jak w grafie G. Zatem rozwiązanie działa w czasie $O(m \log n)$.

Tomasz IDZIASZEK

Rozwiązanie zadania M 1375.
Płaszczyzną symetralną odcinka XY nazywamy płaszczyznę do niego prostopadłą, przechodzącą przez jego środek.

Rozważmy najpierw jedną ścianę x naszego wielościanu. Płaszczyzny symetralne krawędzi tej ściany przecinają się wszystkie wzdłuż prostej ℓ_x prostopadłej do ściany x i przechodzącej przez środek okręgu opisanego na tej ścianie. Ta prosta jest zbiorem środków wszystkich sfer zawierających wszystkie wierzchołki ściany x.

Niech AB będzie wspólną krawędzią sąsiednich ścian x i y. Proste ℓ_x, ℓ_y nie są równoległe i obie leżą w płaszczyźnie symetralnej AB. Przecinają się więc w jednym punkcie, który jest środkiem sfery opisanej na ścianach x i y.



Z drugiej strony, jeśli jakaś sfera jest opisana na ścianach x i y, to jej środek musi leżeć zarówno na prostej ℓ_x, jak i na prostej ℓ_y, co dowodzi, że ta sfera jest wyznaczona jednoznacznie.