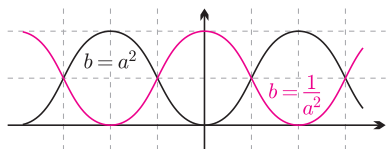


Rys. 9. Wykres funkcji $f(x) = \sin(3x) + x$ ograniczony krzywymi $b = a + 1$ i $b = a - 1$; odwzorowanie XY-ograniczone zachowuje punkty przecięcia wykresów i pozwala porównywać wartości funkcji.



Rys. 10. Wykres $b = 1/a^2$ powstały przez odbicie wykresu $b = a^2$.

Podobnie jak w odwzorowaniu Y-ograniczone, tak w XY-ograniczone, wykres funkcji wykładniczej ma środek symetrii (dowód jest dokładnie taki sam jak dla odwzorowania Y-ograniczonego). Różnica dotyczy wykresu funkcji logarytmicznej (o której dotąd nie pisałem), ponieważ w odwzorowaniu XY-ograniczone on także ma środek symetrii (w punkcie przecięcia z „osią” odciętych). Funkcje wzajemnie odwrotne w odwzorowaniu XY-ograniczone mają tę samą charakterystyczną cechę co w klasycznym układzie prostokątnym: są symetryczne względem prostej $x = y$.

Jeśli punkt wykresu funkcji f o współrzędnych XY-ograniczone $(a, f(a))$ przechodzi na punkt $(f(a), a)$ wykresu funkcji f^{-1} , to w przeliczeniu na współrzędne prostokątne punkt $(\arctg a, \arctg f(a))$ przechodzi na $(\arctg f(a), \arctg a)$ – odbicie punktu wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.

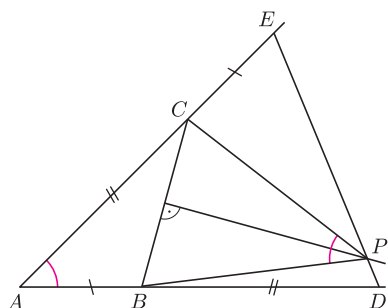
Warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół związany z wykresami w odwzorowaniach ograniczonych. Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ powstaje przez odbicie symetryczne fragmentu wykresu funkcji f obejmującego wartości dodatnie oraz fragmentu obejmującego wartości ujemne względem prostych, odpowiednio, $b = 1$ i $b = -1$ (rys. 10). Wynika to, oczywiście, z wielokrotnie tu wspomnianych własności okręgu liczbowego.

Moja podróż po świecie niekonwencjonalnych układów współrzędnych prowadziła mnie przez świat niespotykany w szkolnych podręcznikach matematyki. Spirale i zamknięte krzywe będące wykresami funkcji w układzie biegunowym oraz mieszczące się na ograniczonej powierzchni wykresy w odwzorowaniu XY-ograniczone nie wyczerpują tematu „nieznanych wykresów funkcji”. Zachęcam Czytelnika do zgłębiania tematu niezwykłych wykresów we własnym zakresie. Można analizować różne funkcje, wybrać inne układy współrzędnych, przedstawiać wykresy w przestrzeniach innych niż płaszczyzna euklidesowa. . . Temat wydaje się niewyczerpany.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1372. Dany jest trójkąt ABC i takie punkty D i E , że B leży na odcinku AD , C leży na odcinku AE oraz zachodzą równości $BD = AC$ i $CE = AB$ (rysunek). Symetralna odcinka BC przecina DE w punkcie P . Udowodnić, że kąty BAC i BPC są równe.

Rozwiązanie na str. 14

M 1373. Na wyspie jest 2012 czerwonych, 2013 zielonych i 2014 niebieskich kameleonów. Jeśli spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, każdy z nich zmienia swój kolor na trzeci kolor. Czy może dojść do sytuacji, w której na wyspie wszystkie kameleony będą miały ten sam kolor?

Rozwiązanie na str. 2

M 1374. Wykazać, że nie istnieje liczba pierwsza p , dla której

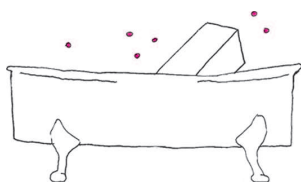
$$1^{2013} + 2^{2013} + \dots + (p-1)^{2013} = p^{2013}.$$

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Krzysztof TURZYŃSKI

F 823. Do prostopadłościenniej wanny nalano dużo wody, po czym umieszczono w wannie jednorodny, wykonany z materiału o gęstości ρ , prostopadłościenny klocek o wymiarach $b \times b \times L$, przy czym $b \ll L$. Zrobiono to tak zmyślnie, że najmniejsze ściany klocka mogą ślizgać się bez tarcia po pionowych ścianach wanny, krawędzie o długości b są pionowe lub poziome, a siła grawitacji działająca na klocek równoważy siłę wyporu. Czy klocek jest w położeniu równowagi trwałej?

Rozwiązanie na str. 3



F 824. Góra lodowa ma kształt stożka o pionowej osi. Wierzchołek znajduje się pod powierzchnią wody. Jaka część wysokości góry lodowej znajduje się nad wodą? Rozwiązanie na str. 13