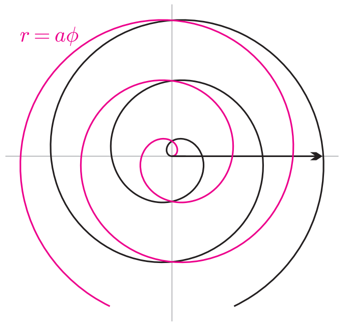
Zaczęło się od okręgu. Wykres funkcji sinus okazał się okręgiem. Jak to możliwe? Okazuje się, że czasem lekkie odstąpienie od utartego punktu widzenia może nas daleko zaprowadzić. Wystarczy, na przykład, wybrać inny niż prostokątny układ współrzędnych do przedstawiania wykresów funkcji.

Nieznane wykresy znanych funkcji

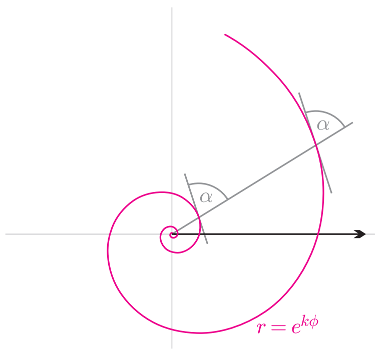
Piotr PIKUL[*]

Pierwszym układem współrzędnych, jaki nasuwa nam się zamiast układu prostokątnego, jest układ biegunowy. Dla przypomnienia, w tym układzie punkt o współrzędnych (ϕ, r), $r \geqslant 0$ leży na półprostej tworzącej z ustaloną osią biegunową kąt skierowany o mierze ϕ, w odległości r od ustalonego bieguna. Dla ujemnych wartości r przyjmujemy, że punkt leży po przeciwnej stronie bieguna, czyli że $(\phi, r) = (\phi + \pi, -r)$.



Rys. 1. Wykres funkcji liniowej we współrzędnych biegunowych, złożony z dwóch spiral Archimedesa.

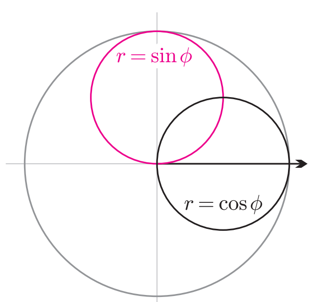
Dopuszczenie miar kąta spoza przedziału $[0, 2\pi)$ oraz ujemnych wartości promienia powoduje, że układ biegunowy przestaje spełniać klasyczną definicję układu współrzędnych – przyporządkowanie współrzędnych punktowi przestaje być jednoznaczne. Z punktu widzenia zastosowania układu biegunowego do przedstawiania wykresów funkcji oznacza to, że z takiego wykresu nie da się odczytywać wartości funkcji.



Rys. 2. Spirala logarytmiczna.

Przyjrzyjmy się wykresom kilku elementarnych funkcji w układzie biegunowym. Na początek przyjmijmy, że zmienną niezależną jest kąt ϕ. Wykres funkcji liniowej $r = a\phi$ okazuje się spiralą Archimedesa (rys. 1). Wykresem funkcji wykładniczej $r = a^{\phi}$ jest zaś spirala logarytmiczna (rys. 2), przecinająca wszystkie półproste wychodzące z bieguna pod jednakowym kątem. Wykresy funkcji trygonometrycznych sinus ($r = \sin\phi$) i cosinus ($r = \cos\phi$) przybiorą kształt okręgów (rys. 3). Funkcje trygonometryczne, a także funkcje budowane na ich podstawie, dają zwykle ciekawe wykresy w układzie biegunowym. Na przykład $r = \frac{1}{\sin\phi}$ to prosta, a $r = \frac{1}{|\sin\phi| + |\cos\phi|}$ to brzeg kwadratu.

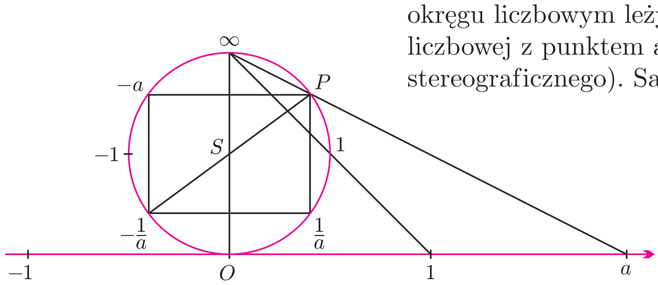
Zachęcam do własnych badań nad wykresami funkcji $r = f(\phi)$, a także funkcji $\phi = f(r)$ – zwykle otrzymujemy wtedy zupełnie inne rezultaty.



Rys. 3. Wykresy funkcji sinus (kolorowy) i cosinus (czarny) w układzie biegunowym.

Abstrahując od konkretnych funkcji, możemy także zastanowić się nad ogólniejszymi własnościami. Na przykład wykres każdej funkcji nieparzystej $(f(-x) = -f(x))$ we współrzędnych biegunowych jest symetryczny względem prostej prostopadłej do osi biegunowej. Wykres funkcji parzystej $(f(-x) = f(x))$ jest z kolei symetryczny względem osi biegunowej. Fakty te można stosunkowo prosto wykazać, korzystając z zależności między współrzędnymi biegunowymi a prostokątnymi.

Z tematem niekonwencjonalnych wykresów funkcji wiąże się jeszcze (co najmniej) jeden ciekawy okrąg. Nazwałem go okręgiem liczbowym, gdyż każdemu jego punktowi odpowiada liczba rzeczywista. Konstrukcja okręgu liczbowego opiera się na rzucie stereograficznym. Okrąg o jednostkowej średnicy jest styczny do osi liczbowej w jej początku. Punkt P o współrzędnej a na okręgu liczbowym leży na odcinku łączącym punkt o współrzędnej a na osi liczbowej z punktem antypodycznym do punktu styczności (środkiem rzutu stereograficznego). Samemu środkowi rzutu przyporządkowujemy wartość ∞.



Rys. 4. Konstrukcja okręgu liczbowego.

Tak zdefiniowany okrąg liczbowy ma dość interesujące własności. Na wstępie warto zauważyć, że liczba przypisana danemu punktowi P na okręgu jest tak naprawdę równa $\operatorname{tg}\frac{1}{2}|\sphericalangle OSP|$ (patrz rys. 4). Korzystając ze wzorów redukcyjnych, można wykazać, że średnica okręgu liczbowego łączy ze sobą punkty odpowiadające liczbom, których iloczyn wynosi -1. Ponadto każda liczba dodatnia i jej odwrotność są równoodległe od 1, a liczba ujemna i jej odwrotność – równoodległe od -1.

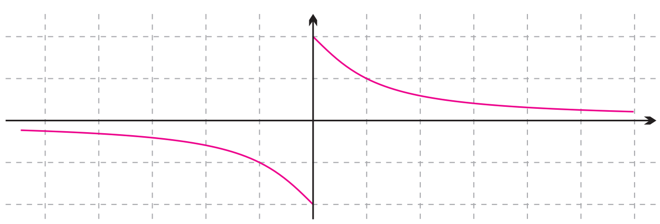
Jaki jest związek okręgu liczbowego z wykresami funkcji? Jak sama nazwa wskazuje, można go wykorzystać zamiast osi liczbowej i skonstruować całkiem ciekawy

[*]uczeń VIII LO im. Marii Skłodowskiej--Curie w Katowicach, laureat trzeciego miejsca na XXIX Ogólnopolskim Sejmiku Matematyków w Szczyrku

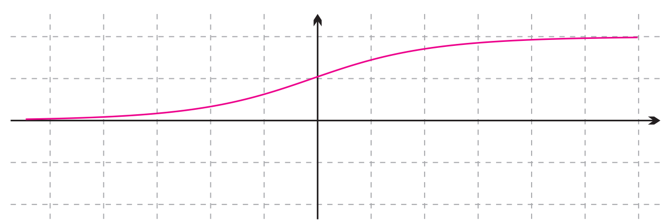
układ współrzędnych na nieograniczonej powierzchni walcowej. W takim układzie jedna oś współrzędnych jest klasyczną osią liczbową pokrywającą się z jedną z tworzących, a drugą oś stanowi okrąg liczbowy ułożony prostopadle do tworzących. W takim układzie współrzędnych wykres funkcji *odwrotność*, czyli $1/x$, okazuje się spójną krzywą (jeśli przyjmiemy, że dla argumentu 0 funkcja *odwrotność* jest określona i przyjmuje wartość ∞).

Dla uproszczenia, możemy sobie wyobrazić (rys. 5), że rozcinamy powierzchnię walca wzdłuż prostej o rzędnej równej ∞, otrzymując pas bez brzegu (przy okazji pozbywamy się kontrowersyjnej liczby ∞). W swojej pracy nazwałem przyporządkowanie parom liczb rzeczywistych punktów takiego pasa Y-*ograniczonym odwzorowaniem współrzędnych*. Formalnie, odwzorowanie Y-ograniczone przyporządkowuje parze liczb rzeczywistych (a,b) punkt płaszczyzny o współrzędnych prostokątnych $(a, \operatorname{arctg} b)$.

W odwzorowaniu Y-ograniczonym wykresy niektórych funkcji zyskują wartość estetyczną, której nie przejawiają przy przedstawianiu w układzie prostokątnym. Na przykład wykres funkcji tangens w takim odwzorowaniu składa się z prostych odcinków, które po nawinięciu wykresu na walec (i uzupełnieniu funkcji tangens o wartości nieskończone w punktach nieokreśloności) tworzą linię śrubową. Wynika to, oczywiście, z wykorzystania funkcji tangens do konstrukcji odwzorowania Y-ograniczonego.

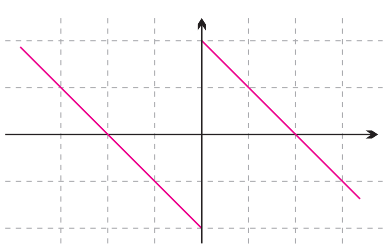


Rys. 5 Wykres funkcji *odwrotność*. . .



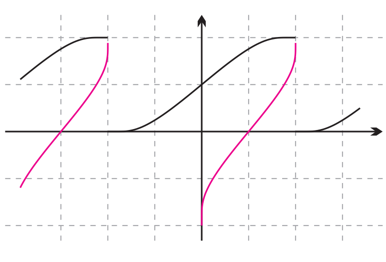
Rys. 6. . . . i funkcji wykładniczej w odwzorowaniu Y-ograniczonym.

Najciekawszym (i jednocześnie prostym) przykładem wydaje mi się jednak funkcja wykładnicza. Jej wykres w odwzorowaniu Y-ograniczonym ma środek symetrii w punkcie $(0,1)$ przecięcia z „osią” rzędnych (rys. 6). Wynika to z faktu, że $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, zatem jeśli punkt $A = (a,b)$ należy do wykresu, punkt $A' = (-a, \frac{1}{b})$ również do niego należy. Zgodnie z własnościami okręgu liczbowego wzajemnie odwrotne liczby dodatnie są równoodległe od 1, czyli punkty A i A', które są równoodległe od punktu $(0,1)$ w poziomie, będą od niego równoodległe także w pionie, czyli są środkowo symetryczne względem $(0,1)$. Ponieważ każdy punkt wykresu należy do niego wraz ze swym obrazem w symetrii względem $(0,1)$, więc cały wykres jest środkowo symetryczny.



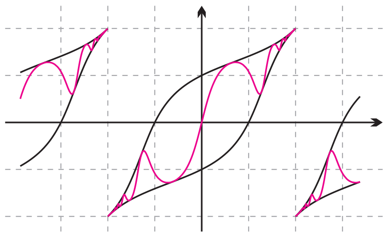
Rys. 7. Wykres funkcji *odwrotność* w odwzorowaniu XY-ograniczonym.

W ograniczaniu obszaru wykresu można posunąć się jeszcze dalej. Gdy obie osie prostokątnego układu współrzędnych zastąpimy rozciętymi okręgami liczbowymi – otrzymamy *odwzorowanie* XY-*ograniczone*. Przeciwdziedziną XY-ograniczonego odwzorowania współrzędnych jest kwadrat o boku π (bez brzegu). Zgodnie z formalną definicją, w tym odwzorowaniu parze liczb (a,b) odpowiada punkt płaszczyzny o współrzędnych prostokątnych $(\operatorname{arctg} a, \operatorname{arctg} b)$. Odwzorowanie XY-ograniczone daje nam możliwość przedstawienia (na ograniczonej powierzchni) wykresu funkcji w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

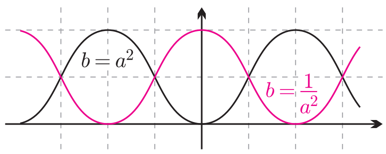


Rys. 8. Wykresy przykładowych funkcji wykładniczej (czarny) i logarytmicznej (kolorowy) w odwzorowaniu XY-ograniczonym.

Jako pierwszy przykład wykresu funkcji w odwzorowaniu XY-ograniczonym rozpatrzmy wykres funkcji *odwrotność* (rys. 7). Składa się on z dwóch prostych odcinków (bez końców). Odcinki te są równoległe do wykresu funkcji liniowej $f(x) = -x$ w tym odwzorowaniu, co wynika ze wspomnianej już własności okręgu liczbowego: liczby x i $-\frac{1}{x}$ leżą naprzeciwko siebie, a co za tym idzie, na „rozprostowanym” okręgu liczbowym odległość pomiędzy x a $-\frac{1}{x}$ jest stała – równa połowie długości okręgu. Na tej podstawie wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ można otrzymać, przesuwając wykres funkcji $f(x) = -x$ (fragmentami, oczywiście).



Rys. 9. Wykres funkcji $f(x) = \sin(3x) + x$ ograniczony krzywymi $b = a + 1$ i $b = a - 1$; odwzorowanie XY-ograniczone zachowuje punkty przecięcia wykresów i pozwala porównywać wartości funkcji.



Rys. 10. Wykres $b = 1/a^2$ powstały przez odbicie wykresu $b = a^2$.

Podobnie jak w odwzorowaniu Y-ograniczonym, tak w XY-ograniczonym wykres funkcji wykładniczej ma środek symetrii (dowód jest dokładnie taki sam jak dla odwzorowania Y-ograniczonego). Różnica dotyczy wykresu funkcji logarytmicznej (o której dotąd nie pisałem), ponieważ w odwzorowaniu XY-ograniczonym on także ma środek symetrii (w punkcie przecięcia z „osią” odciętych). Funkcje wzajemnie odwrotne w odwzorowaniu XY-ograniczonym mają tę samą charakterystyczną cechę co w klasycznym układzie prostokątnym: są symetryczne względem prostej $x = y$.

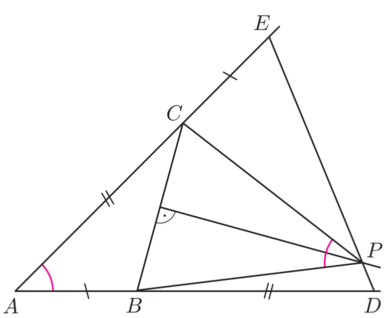
Jeśli punkt wykresu funkcji f o współrzędnych XY-ograniczonych $(a, f(a))$ przechodzi na punkt $(f(a), a)$ wykresu funkcji f^{-1}, to w przeliczeniu na współrzędne prostokątne punkt $(\operatorname{arctg} a, \operatorname{arctg} f(a))$ przechodzi na $(\operatorname{arctg} f(a), \operatorname{arctg} a)$ – odbicie punktu wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół związany z wykresami w odwzorowaniach ograniczonych. Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ powstaje przez odbicie symetryczne fragmentu wykresu funkcji f obejmującego wartości dodatnie oraz fragmentu obejmującego wartości ujemne względem prostych, odpowiednio, $b = 1$ i $b = -1$ (rys. 10). Wynika to, oczywiście, z wielokrotnie tu wspominanych własności okręgu liczbowego.

Moja podróż po świecie niekonwencjonalnych układów współrzędnych prowadziła mnie przez świat niespotykany w szkolnych podręcznikach matematyki. Spirale i zamknięte krzywe będące wykresami funkcji w układzie biegunowym oraz mieszczące się na ograniczonej powierzchni wykresy w odwzorowaniu XY-ograniczonym nie wyczerpują tematu „nieznanych wykresów funkcji”. Zachęcam Czytelnika do zgłębiania tematu niezwykłych wykresów we własnym zakresie. Można analizować różne funkcje, wybrać inne układy współrzędnych, przedstawiać wykresy w przestrzeniach innych niż płaszczyzna euklidesowa... Temat wydaje się niewyczerpany.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1372. Dany jest trójkąt ABC i takie punkty D i E, że B leży na odcinku AD, C leży na odcinku AE oraz zachodzą równości $BD = AC$ i $CE = AB$ (rysunek). Symetralna odcinka BC przecina DE w punkcie P. Udowodnić, że kąty BAC i BPC są równe.
Rozwiązanie na str. 14

M 1373. Na wyspie jest 2012 czerwonych, 2013 zielonych i 2014 niebieskich kameleonów. Jeśli spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, każdy z nich zmienia swój kolor na trzeci kolor. Czy może dojść do sytuacji, w której na wyspie wszystkie kameleony będą miały ten sam kolor?
Rozwiązanie na str. 2

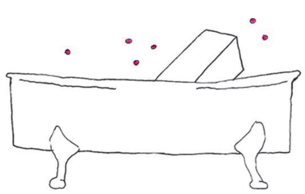
M 1374. Wykazać, że nie istnieje liczba pierwsza p, dla której

$$1^{2013} + 2^{2013} + \ldots + (p-1)^{2013} = p^{2013}.$$

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Krzysztof TURZYŃSKI

F 823. Do prostopadłościennej wanny nalano dużo wody, po czym umieszczono w wannie jednorodny, wykonany z materiału o gęstości ρ, prostopadłościenny klocek o wymiarach $b \times b \times L$, przy czym $b \ll L$. Zrobiono to tak zmyślnie, że najmniejsze ściany klocka mogą ślizgać się bez tarcia po pionowych ścianach wanny, krawędzie o długości b są pionowe lub poziome, a siła grawitacji działająca na klocek równoważy siłę wyporu. Czy klocek jest w położeniu równowagi trwałej?
Rozwiązanie na str. 3



F 824. Góra lodowa ma kształt stożka o pionowej osi. Wierzchołek znajduje się pod powierzchnią wody. Jaka część wysokości góry lodowej znajduje się nad wodą?
Rozwiązanie na str. 13