Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2013

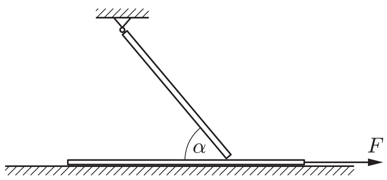
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 550, 551

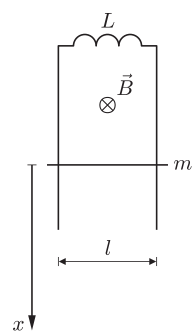
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

550. Cienki arkusz papieru przyciśnięty jest do stołu jednorodnym prętem o masie m. Górny koniec pręta jest zamocowany przegubowo. Kąt między prętem i kartką wynosi α (rys. 1), współczynnik tarcia między nimi wynosi μ. Między kartką a stołem tarcia nie ma. Jaką minimalną, poziomą siłę trzeba przyłożyć do kartki, aby wyciągnąć ją spod pręta?

551. Cewkę o indukcyjności L dołączono do górnych końców dwóch równoległych szyn przewodzących ustawionych pionowo. Odstęp między szynami jest równy l. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B ma kierunek poziomy i jest prostopadłe do płaszczyzny szyn. Poziomy, przewodzący pręt o masie m może poruszać się w polu magnetycznym wzdłuż szyn w ten sposób, że stale się z nimi styka. Opór i samoindukcję przewodników oraz tarcie pręta o szyny zaniedbujemy. Znaleźć zależność położenia pręta od czasu $x(t)$ (rys. 2). Prędkość początkowa pręta jest równa zeru.



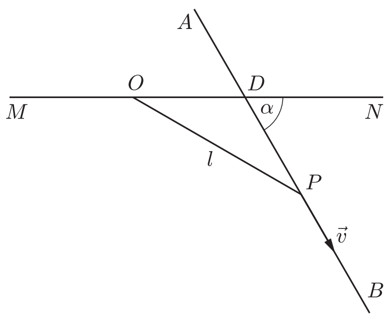
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 9/2012

Przypominamy treść zadań:

542. Statek i kuter płyną po liniach prostych z prędkościami odpowiednio $v_1 = 15$ mil/h i $v_2 = 26$ mil/h. W chwili początkowej kuter znajduje się w odległości 6 mil na południe od rufy statku. W chwili końcowej kuter przecina tor statku 3 mile za nim i znajduje się wtedy najbliżej statku. Ile czasu upływa między tymi chwilami? Wyznacz kurs statku (kąt między kierunkiem południe-północ a wektorem prędkości statku).

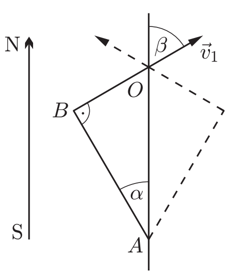
543. Pies P biegnie ze stałą prędkością v po prostej AB, która tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z poziomo rozciągniętym drutem MN (rys. 3). Do obroży psa przymocowana jest lekka pozioma linka o długości l. Linka połączona jest z pierścieniem O o masie m, który może ślizgać się po drucie bez tarcia. Znaleźć naprężenie linki w chwili, gdy pies i pierścień znajdują się w jednakowych odległościach od punktu przecięcia D prostej AB i drutu.



Rys. 3

542. W układzie odniesienia O związanym ze statkiem kuter porusza się ze stałą prędkością $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ i w szukanym czasie przebywa drogę równą długości odcinka AB (rys. 4). Największe zbliżenie ma miejsce, gdy tory kutra i statku przecinają się, zatem tory te są do siebie prostopadłe. Odcinek OA jest dwa razy dłuższy od OB, więc $\sin\alpha = 1/2$, $\alpha = \pi/6$. Kąt β, wyznaczający kurs statku, wynosi $\pi/3$ lub $5\pi/3$. Drugiej możliwości odpowiada rysunek wykonany linią przerywaną. Szukany czas wynosi

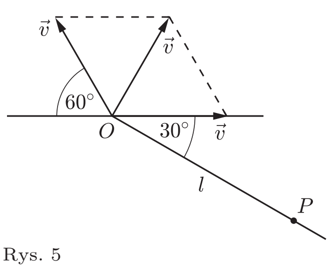
$$t = \frac{|AB|}{v} = \frac{|AO|\cos\alpha}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \approx 14 \text{ min.}$$



Rys. 4

543. Ponieważ linka jest nierozciągliwa, składowe prędkości pierścienia i psa wzdłuż linki są jednakowe i w rozważanej chwili prędkości pierścienia i psa mają równe wartości v. W inercjalnym układzie odniesienia związanym z psem pierścień porusza się po okręgu o promieniu l z prędkością chwilową v (rys. 5). W płaszczyźnie poziomej na pierścień działa siła naciągu linki N i siła reakcji drutu F (rys. 6). Wypadkowa siła działająca na pierścień wzdłuż linki jest siłą dośrodkową:

$$N - F_1 = \frac{mv^2}{l}, \qquad F_1 = F\sin\frac{\pi}{6} = \frac{F}{2}.$$



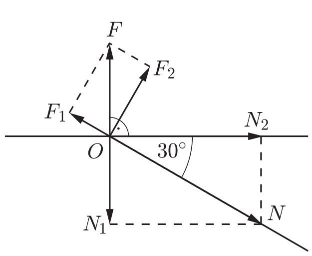
Rys. 5

Prostopadła do drutu składowa N_1 siły naciągu linki równoważy siłę reakcji F:

$$N_1 = \frac{N}{2} = F, \quad \text{stąd} \quad F_1 = \frac{N}{4}.$$

Ostatecznie szukana siła naciągu linki wynosi

$$N = \frac{4mv^2}{3l}.$$



Rys. 6

Klub 44

$\otimes\sqrt{\int!}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 641 ($WT = 1{,}47$) i 642 ($WT = 2{,}50$) z numeru 5/2012

Michał Miodek	Zawiercie	46,19
Roksana Słowik	Knurów	43,65
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,44
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Jędrzej Garnek	Poznań	40,37
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Paweł Łabędzki	Kielce	35,77
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52

Michał Miodek – to już numer 115 w matematycznym Klubie 44.

Zadania z matematyki nr 653, 654

Redaguje Marcin E. KUCZMA

653. W egzaminie testowym pytania są ponumerowane $1, 2, \ldots, n$. Za prawidłową odpowiedź na k-te pytanie uczestnik otrzymuje k punktów; za błędną (lub brak odpowiedzi) otrzymuje $-k$ punktów. Po zliczeniu wyników okazało się, że w każdej trójce uczestników znajdują się dwaj tacy, którzy uzyskali różne sumy punktów. Jaka jest największa liczba uczestników, dla której taka sytuacja mogła mieć miejsce?

654. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{\mathrm{e}^{x_n} - 1} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

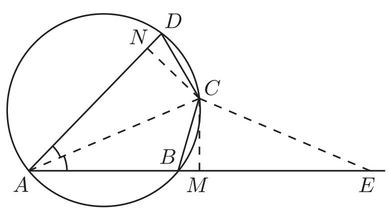
Zadanie 654 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa. Będzie ono miało dalszy ciąg w numerze 5/2013.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2012

Przypominamy treść zadań:

645. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Boki BC i CD mają jednakową długość. Na przedłużeniu odcinka AB odkładamy odcinek BE długości $|BE| = |AD|$. Dowieść, że $|AC| = |CE|$.

646. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na zbiorze liczb dodatnich, dwukrotnie różniczkowalną, spełniającą warunek $f''(x) > \frac{1}{1+x^2}$ dla $x > 0$. Czy taka funkcja może mieć asymptotę przy $x \to \infty$?



645. Niech punkty M i N będą rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na proste AB i AD. Punkt C (środek łuku BD) leży na dwusiecznej kąta BAD. Zatem $|AM| = |AN|$, $|CM| = |CN|$, trójkąty CMB i CND są przystające, $|BM| = |DN|$. Są możliwe dwie konfiguracje: albo (jak na rysunku) punkt N leży między punktami A i D, a B między A i M – albo odwrotnie (M między A, B, zaś D między A, N).

W sytuacji, jak na rysunku, mamy równości

$$2 \cdot |AM| = |AM| + |AN| = |AB| + |BM| + |AD| - |DN| = |AB| + |AD| = |AE|,$$

więc punkt M jest środkiem odcinka AE (rozumowanie w drugim przypadku, po oczywistej zmianie w znakach, prowadzi do tej samej konkluzji). Wniosek: prosta CM jest symetralną odcinka AE i wobec tego $|AC| = |CE|$.

646. Dla $x \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$f''(x) > \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{2x^2}.$$

Weźmy pod uwagę funkcję

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}\ln x.$$

Dla $x \geqslant 1$ mamy

$$g''(x) = f''(x) - \frac{1}{2x^2} > 0,$$

więc funkcja g jest ściśle wypukła w przedziale $\langle 1; \infty)$. Stąd wynika, że dla każdej liczby $x \geqslant 1$ jest spełniona nierówność $g(x) + g(3x) > 2g(2x)$. Po podstawieniu wyrażenia definiującego funkcję g i prostym przekształceniu dostajemy:

$$f(x) + f(3x) - 2f(2x) > \\ > \ln(2x) - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(3x) \qquad \text{dla } x \geqslant 1.$$

Prawa strona ma wartość stałą

$$c = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 > 0.$$

Przypuśćmy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą funkcji f przy $x \to \infty$. To znaczy, że

$$f(x) = ax + b + \varphi(x), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0.$$

Uzyskana przed chwilą zależność

$$f(x) + f(3x) - 2f(2x) > c$$

przybiera postać

$$[(ax+b) + (3ax+b) - 2(2ax+b)] + \\ + [\varphi(x) + \varphi(3x) - 2\varphi(2x)] > c \qquad \text{dla } x \geqslant 1.$$

To już jest oczekiwana sprzeczność, bo wyrażenie w pierwszym nawiasie kwadratowym ma stale wartość 0, a to w drugim dąży do 0 gdy $x \to \infty$. Wniosek: Funkcja f, spełniająca podane warunki, nie ma asymptoty przy $x \to \infty$.

Uwaga. Występująca w treści zadania funkcja $1/(1+x^2)$ złośliwie kieruje od razu myśl rozwiązującego na funkcję $\operatorname{arctg} x$ (której jest pochodną). Idąc tym tropem również można dojść do rozwiązania, jednak bardziej uciążliwego niż to, które zostało podane wyżej – i z którego widać, że istotą założenia jest oszacowanie $f''(x)$ z dołu przez funkcję $1/(2x^2)$, a nie przez $1/(1+x^2)$.