jednorazowo tylko 1/3 uczestników, a spało się w wieloosobowych pokojach. Musiało jednak być w tych Szkołach coś pociągającego, skoro chętnych nie brakowało. Szkoły były też w Siedlcach, Miętnem, aż trafiły do rajskich Grzegorzewic [2].

Miętne pamięta się przede wszystkim ze ślubu wykładowcy ze słuchaczką, który odbył się w Pałacu w Mordach według celebry OKM. Ślub odbył się również w realu, a Szkoła straciła (na rzecz USA) doskonałego wykładowcę i uroczą słuchaczkę. Z Miętnego pamięta się też licytację, na której wystawiono różne gadżety, między innymi kultową koszulę w czerwoną kratę pewnego wykładowcy. Warunki życia, ale i koszty były zbyt luksusowe, więc Szkoła przeniosła się w zimie 1997 roku na 12 lat do wspominanych z sentymentem Grzegorzewic.

Po przyjeździe do Grzegorzewic pierwsze kroki kierowane były do klubu, mieszczącego się w piwnicach pałacyku. Tam też spędzano wszystkie wieczory. Znajomy zapach pleśni znikał już po pierwszym wieczorze spędzonym nad szklanką piwa lub kieliszkiem wina. W sąsiednich salach odbywały się spontaniczne turnieje ping ponga, w innej mecze brydżowe, piłkarzyki. Rozgrywano też aktualnie modne gry. W ostatnich latach popularne były partyjki scrabble'a. Odbywały się tam i tańce, zimą miał tradycyjnie miejsce składkowy bankiet z napojem magicznym receptury jednego z wykładowców (w czasie jego nieobecności receptura była konsultowana telefonicznie). Studenci pewnie byliby zdziwieni widokiem ich nauczycieli, którzy rapują po rosyjsku przy aktywnym udziale sali. Niezapomniany był widok Kuby naprawiającego rozstrojone pianino przez kilka kolejnych spotkań. Jego bezowocne próby zaowocowały całkiem poważnym odczytem *Porządkowanie dźwięków, czyli dlaczego nie da się nastroić pianina w Grzegorzewicach.* Latem zamiast bankietu organizowano ognisko z kiełbaskami i śpiewami. A niezależnie od pory roku udawano się na spacery po groblach stawów rybnych lub nad brzegiem przepływającej tam rzeczki o pięknej nazwie Pisia Gągolina. Po wyjeździe z Grzegorzewic, mimo radykalnej poprawy warunków bytowych (a może właśnie z tego powodu) już nigdzie nie mogliśmy odtworzyć takiej atmosfery…

Konkursy

Od 18 lat, pod koniec każdej Szkoły, ogłaszane są wyniki plebiscytu na najlepszego wykładowcę – konkursu budzącego całe spektrum emocji zarówno wśród słuchaczy, jak i wykładowców. Zwycięzca otrzymuje wykonany z filcu medal Filca (nazwa jest świadomą grą słów, ale musimy podkreślić, że nie jest to medal Fieldsa, chociażby z tego powodu, iż jego laureaci mogą mieć powyżej 40 lat). Następna Szkoła rozpoczyna się od wręczenia tego medalu, a laureat wygłasza pierwszy odczyt na dowolnie wybrany przez siebie temat. Medalem nagrodzono dotąd 35 osób. Trzy z nich otrzymały medal Filca trzykrotnie.

Od Szkoły letniej w roku 2004 ogłaszany jest inny konkurs: na Najlepszego Słuchacza, odbywający się w ostatni wieczór. Zwycięzca musi wykazać się nie tylko bardzo dobrą znajomością wykładów z aktualnej Szkoły, ale także refleksem, bystrością i inteligencją, bowiem większość pytań trudno zaliczyć do standardowych.

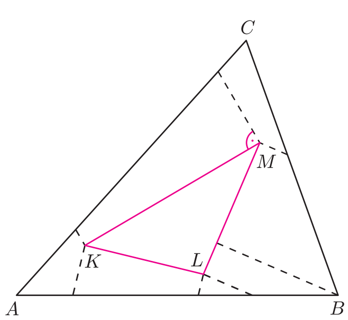
Uwagi końcowe

Artykuł utkany jest cytatami z artykułów i wspomnień Marka Kordosa. Nie umieliśmy w wielu miejscach lepiej skomentować i opisać wydarzeń związanych z Ośrodkiem Kultury Matematycznej. Dziękujemy za wirtualny udział przy pisaniu tego artykułu. Błędy bierzemy na siebie. Przy pisaniu tych wspomnień korzystaliśmy obficie z materiałów zamieszczonych na świetnie udokumentowanej stronie Szkół `http://www.msn.uph.edu.pl/smp`. Czytelnika zachęcamy do samodzielnej eksploracji tych bogactw.

Zaznaczone zostały cytowania

[1] M. Kordos, *Więc nie prześladujcie zła zbyt uporczywie*, MSN 16
[2] M. Kordos, *Pamiętajmy o Leszku Szczerbie*, MSN 46
[3] `http://www.msn.uph.siedlce.pl/smp/?strona=historia`
[4] M. Kordos, *Inna jakość*, MSN 31

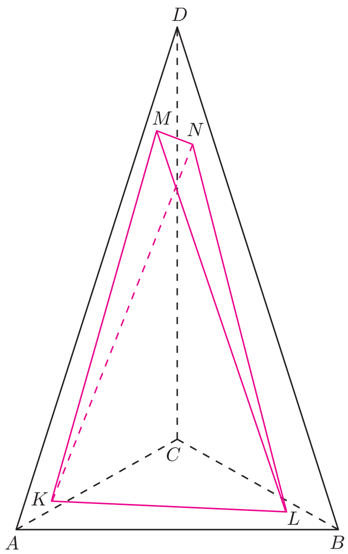
Kącik przestrzenny (15): O sumie długości krawędzi czworościanu



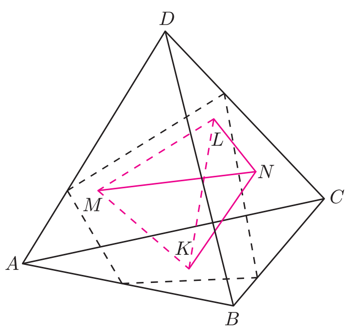
Rys. 1

Jeśli na płaszczyźnie wewnątrz trójkąta ABC znajduje się trójkąt KLM, to obwód trójkąta KLM jest nie większy od obwodu trójkąta ABC. Pomysł, na którym opiera się dowód tego faktu, został przedstawiony na rysunku 1. W podobny sposób można udowodnić, że jeśli czworościan $KLMN$ znajduje się wewnątrz czworościanu $ABCD$, to jego pole powierzchni jest mniejsze od pola powierzchni $ABCD$. A co umiemy powiedzieć o sumie długości krawędzi?

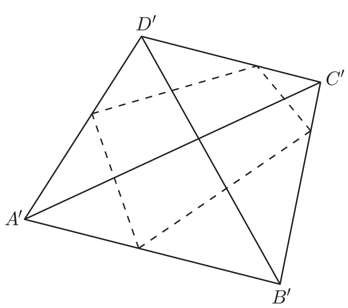
Jeśli czworościan $ABCD$ jest foremny, to jego krawędzie mają długości nie mniejsze od długości krawędzi czworościanu $KLMN$. W takim razie suma długości krawędzi czworościanu $ABCD$ jest nie mniejsza od sumy długości krawędzi czworościanu $KLMN$. Jednak w ogólności nie musi tak być.



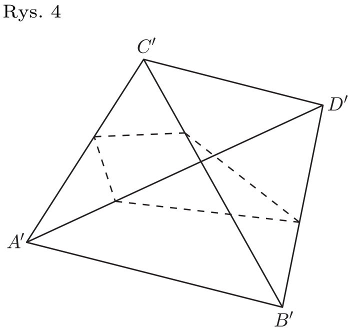
Rys. 2



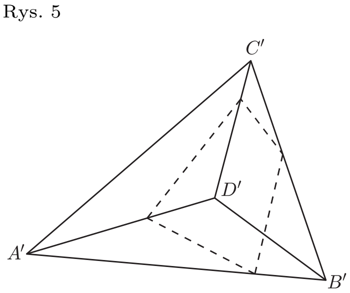
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Rozważmy mianowicie ostrosłup prawidłowy $ABCD$ o podstawie ABC, która ma boki długości 1, i ramionach długości d (rys. 2). Umieśćmy wewnątrz niego czworościan $KLMN$ w taki sposób, że wierzchołek K jest blisko A, L – blisko B, zaś M i N blisko wierzchołka D. Wtedy suma krawędzi ostrosłupa $ABCD$ jest równa $3 + 3d$, zaś suma krawędzi czworościanu $KLMN$ jest większa od sumy $KM + KN + LM + LN$, która może być dowolnie bliska $4d$. Jeśli więc weźmiemy d znacznie większe niż 1, to suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ będzie większa od sumy długości krawędzi czworościanu $ABCD$.

Widzimy zatem, że podany na początku fakt nie przenosi się z płaszczyzny na przestrzeń. Jednak w obu powyższych przykładach suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ nie przekracza $\frac{4}{3}$ sumy długości krawędzi czworościanu $ABCD$. I właśnie to spostrzeżenie udowodnimy:

Jeśli czworościan $KLMN$ jest zawarty wewnątrz czworościanu $ABCD$, to suma długości jego krawędzi jest nie większa od $\frac{4}{3}$ sumy długości krawędzi czworościanu $ABCD$.

Powyższy problem był jednym z zadań na finale olimpiady w ZSRR w 1982 roku. Dowód podzielimy na kilka podproblemów. Dalej podajemy rozwiązania, ale zachęcamy do samodzielnej pracy.

Krok 1. *Załóżmy bez straty dla ogólności, że KLM jest ścianą o największym obwodzie. Wtedy suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ nie przekracza dwukrotności obwodu trójkąta KLM.*

Krok 2. *Załóżmy, że ℓ jest obwodem wielokąta będącego przekrojem czworościanu $ABCD$ płaszczyzną KLM. Wtedy obwód trójkąta KLM nie przekracza ℓ.*

Krok 3. *Niech A', B', C', D' będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów A, B, C, D na płaszczyznę KLM. Wtedy suma długości wszystkich odcinków łączących punkty A', B', C', D' jest nie mniejsza niż $\frac{3}{2}\ell$.* (Ten fragment dowodu jest najtrudniejszy.)

Krok 4. *Suma długości odcinków łączących punkty A', B', C', D' jest nie większa niż suma długości krawędzi czworościanu $ABCD$.*

Rozwiązania

Krok 1. Suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ jest równa połowie sumy obwodów wszystkich czterech jego ścian. Ta ostatnia zaś nie może przekraczać dwukrotności obwodu ściany o największym obwodzie.

Krok 2. Pomysł przedstawiony na rysunku 1 działa i w tej sytuacji.

Krok 3. Załóżmy najpierw, że punkty A', B', C', D' są wierzchołkami czworokąta wypukłego. (Oczywiście punkty te mogą leżeć na obwodzie czworokąta w różnej kolejności!) Rozważany przekrój czworościanu jest wypukły i leży wewnątrz tego czworokąta (rys. 4 i 5). Zatem ℓ nie może przekraczać obwodu czworokąta o wierzchołkach A', B', C', D' (dowód jak na rysunku 1). Ponadto z nierówności trójkąta wiemy, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest większa od połowy jego obwodu. Łącząc te dwie nierówności, dostajemy

$$\frac{3}{2}\ell \leqslant A'B' + A'C' + A'D' + B'C' + B'D' + C'D'.$$

Przyjmijmy teraz, że jeden z tych punktów (np. D') leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta wyznaczonego przez pozostałe punkty. Podobnie stwierdzamy, że rozważany przekrój jest wypukły i leży wewnątrz tego trójkąta (rys. 6). Zatem

$$\ell \leqslant A'B' + B'C' + C'A'.$$

Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(A'B' + B'C' + C'A') \leqslant A'D' + B'D' + C'D'.$$

I tym razem te dwie nierówności dają żądane oszacowanie.

Krok 4. Wynika to natychmiast z faktu, że długość odcinka nie może być mniejsza niż długość jego rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę.

Michał KIEZA