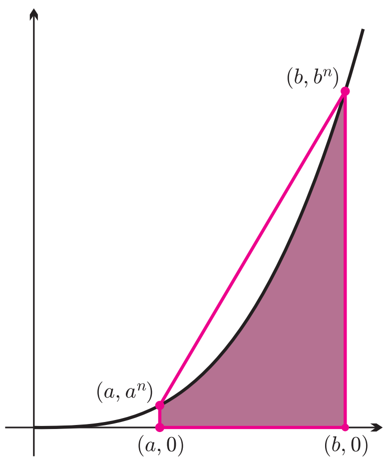
Dwa słowa o zadaniu M 1360

Michał KRYCH[*]

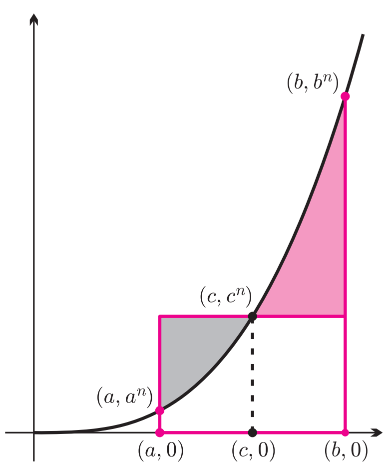
W *Delcie* nr 9 z 2012 r. pojawiło się zadanie: *Udowodnić, że dla różnych liczb dodatnich a, b i liczby całkowitej $n > 1$ zachodzi nierówność*
$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<\frac{a^n+b^n}{2}.$$
Jest też tam dowód nierówności. Chciałbym dodać uzasadnienie geometryczne, czy też wyjaśnić jej znaczenie geometryczne.



Rys. 1

Przepiszmy nierówność w postaci
$$\frac{1}{n+1}\cdot(b^{n+1}-a^{n+1})<\frac{1}{2}\cdot(b-a)(a^n+b^n).$$
Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że $a < b$. Otóż prawa strona to pole trapezu o podstawach a^n, b^n i wysokości $b-a$. Lewa to (zacienione) pole pod wykresem funkcji x^n ograniczonej do przedziału $[a, b]$. Ponieważ funkcja x^n jest ściśle wypukła na półprostej $[0,\infty)$, więc jej wykres znajduje się pod dowolną cięciwą. Oznacza to, że obszar pod wykresem jest zawarty w trapezie o wierzchołkach $(a, 0)$, $(b, 0)$, (b, b^n) i (a, a^n). No i czego tu dowodzić?

Po rozwiązaniu podanym w miesięczniku jest uwaga o nierówności
$$\frac{a+b}{2}<\sqrt[n]{\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}}$$
równoważnej
$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}>(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$



Rys. 2

Niech $c=\frac{a+b}{2}$. Tym razem pole pod wykresem funkcji x^n ma okazać się większe od pola prostokąta o podstawie $b-a$ i wysokości $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n=c^n$. Wynika to z tego, że jeśli $0 < h < c$, to

(W) $$c^n-(c-h)^n<(c+h)^n-c^n,$$

co jest równoważne nierówności
$$c^n<\frac{1}{2}((c+h)^n+(c-h)^n),$$
więc wynikającej natychmiast ze ścisłej wypukłości funkcji x^n. Z nierówności (W) wynika od razu, że symetria względem punktu (c, c^n) przekształca obszar szary na zbiór zawarty, ale niewypełniający obszaru kolorowego, więc nierówność jest prawdziwa.

Wypukłość funkcji x^n na półprostej $[0,\infty)$ można wywnioskować z tego, że jej pochodna, czyli nx^{n-1}, jest ściśle rosnąca na $[0,\infty)$ lub – jeśli ktoś nie lubi pochodnych – z ciągłości funkcji x^n i nierówności
$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$
prawdziwej dla różnych liczb dodatnich x, y. Można jej dowieść indukcyjnie. Krok indukcyjny polega na pomnożeniu obu stron nierówności
$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$
przez liczbę dodatnią
$$\frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{x^n+y^n}$$
i stwierdzeniu, że
$$(x^{n+1}+y^{n+1})\left(\frac{x+y}{2}\right)^n>(x^n+y^n)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1},$$
czyli
$$2(x^{n+1}+y^{n+1})>(x^n+y^n)(x+y).$$
Ostatnia nierówność jest równoważna takiej $(x^n-y^n)(x-y)>0$ prawdziwej w oczywisty sposób.

[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski